MÉMOIRE

SUR L'ACTION MUTUELLE

D'UN

CONDUCTEUR VOLTAÏQUE

ET D'UN AIMANT;

PAR M. AMPÈRE,

DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES DE PARIS, DES SOCIÉTÉS ROYALES DE LONDRES ET D'ÉDIMBOURG, DE LA SOCIÉTÉ HELVÉTIENNE DES SCRUTATEURS DE LA NATURE, DE LA SOCIÉTÉ PHILOSOPHIQUE DE CAMBRIDGE, DE CELLE DE PHYSIQUE ET D'HISTOIRE NATURELLE DE GENÈVE, DES ACADÉMIES ROYALES DE BRUXELLES, DE LISBONNE ET DE LYON, PROFESSEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE ET AU COLLÉGE DE FRANCE.

PRÉSENTÉ A LA SÉANCE DU 28 OCTOBRE 1826.

MÉMOIRE

SUR L'ACTION MUTUELLE

D'UN

CONDUCTEUR VOLTAÏQUE

ET D'UN AIMANT (1).

Quoique M. Savari, dans le Mémoire qu'il a lu à l'Académie des sciences de Paris, le 3 février 1823, ait déduit la loi, que M. Biot a proposée en 1820 pour représenter l'action qui s'exerce entre un élément de conducteur voltaïque et une molécule magnétique, de la formule par laquelle j'ai exprimé l'action de deux élémens de fils conducteurs, en substituant à cette molécule l'extrémité du solénoïde électro-dynamique à laquelle elle est identique, quand on con-

(1) La plus grande partie de ce Mémoire fut d'abord, avec la lettre qui est jointe ici, adressée, au commencement de 1826, à M. le docteur Gherardi. Je l'ai revu depuis, et j'y ai ajouté divers développemens propres à éclaircir toutes les difficultés qui pouvaient rester sur le sujet dont il traite.

çoit l'aimant comme un assemblage de courans électriques disposés autour de ses particules, ainsi que j'ai montré qu'ils devaient l'être pour qu'il en résultât tous les phénomènes que présentent les aimans, et quoique ce jeune physicien ait ainsi ramené ces phénomènes aux effets produits par l'électricité en mouvement; j'ai cru qu'il était important d'examiner, en particulier, l'action mutuelle d'un conducteur voltaïque et d'un aimant, en partant de cette loi considérée comme une simple donnée de l'expérience. En effet, si elle ne résultait pas des premières expériences dont M. Biot l'avait déduite, et qu'on trouve décrites dans la seconde édition de son *Précis élémentaire de physique*, expériences qui ne pouvaient même s'accorder avec elle, elle se trouve aujourd'hui complétement vérifiée par les nouvelles expériences dont il a consigné les résultats dans la troisième édition du même ouvrage; et les physiciens qui admettent ma théorie comme ceux qui la combattent, s'accordent à regarder l'exactitude de cette loi comme incontestable. Elle consiste comme on sait en ce que la force qui résulte de l'action mutuelle d'un élément de conducteur voltaïque et de ce qu'on appelle une molécule magnétique, est perpendiculaire au plan qui joint la molécule magnétique avec l'élément, et que sa valeur pour un même élément et une même molécule, est en raison inverse du carré de leur distance, et en raison directe du sinus de l'angle que la droite qui mesure cette distance, forme avec la direction de l'élément.

La direction et l'intensité de cette force sont ainsi complétement déterminées, mais il n'en est pas de même du point auquel on doit la considérer comme appliquée. Ce point dépend de l'hypothèse qu'on adopte sur la cause des phénomènes électro-dynamiques; on a fait sur cette cause trois hypothèses. La première consiste à admettre l'existence de deux fluides nommés austral et boréal, et à distribuer ces fluides de manière à produire la loi dont il s'agit (1).

La seconde est celle par laquelle j'ai rendu raison des phénomènes observés, en considérant un aimant comme un assemblage de courans électriques, tournant autour de ses particules, et agissant, soit sur les courans électriques d'un autre aimant, soit sur ceux d'un fil conducteur, précisément comme l'expérience m'a prouvé que les courans des fils conducteurs agissent les uns sur les autres.

Enfin, la troisième hypothèse est celle où l'on suppose qu'il existe entre un élément de fil conducteur et une molécule

---

(1) C'est ainsi qu'un grand nombre de physiciens ont pensé qu'il était possible d'expliquer les phénomènes découverts par M. Oersted, et ceux que j'ai observés le premier, par certaines dispositions des deux fluides magnétiques, austral et boréal. Mais il ne suffisait pas de quelques aperçus vagues et généraux, pour l'explication des faits dont se compose cette nouvelle branche de la physique, il fallait surtout trouver une distribution des élémens magnétiques qui pût représenter exactement la loi dont nous nous occupons, c'est ce que j'ai fait dans le Mémoire que j'ai lu à l'Académie des sciences de Paris, le 28 novembre 1825, où se trouvent les principaux résultats dont celui que je publie aujourd'hui contient le développement; on y verra quels sont les phénomènes électro-dynamiques qui peuvent être expliqués de cette manière, et ceux qui prouvent qu'elle ne peut être admise dans tous les cas.

magnétique, une action élémentaire primitive, tendant à faire tourner à la fois la molécule autour de l'élément, et l'élément autour de la molécule.

Cette dernière hypothèse diffère des deux autres, en ce qu'au lieu de n'admettre entre les points matériels qui agissent les uns sur les autres, que des forces dirigées suivant les droites qui les joignent; elle suppose entre l'élément de conducteur voltaïque et la molécule magnétique, une action représentée par deux forces égales et opposées, mais toutes deux perpendiculaires au plan qui passe par l'élément et par la molécule magnétique, appliquées l'une au milieu de l'élément et l'autre à la molécule, et formant ainsi ce que M. Poinsot a nommé un couple; en sorte que, lors même que l'élément et la molécule seraient liés ensemble invariablement, l'assemblage solide qu'ils formeraient prendrait par leur seule action mutuelle un mouvement de rotation. Quoique cette dernière hypothèse semble directement contraire aux premiers principes de la dynamique, suivant lesquels l'action mutuelle des diverses parties d'un même système solide ne peut jamais lui imprimer aucun mouvement, il m'a paru nécessaire de l'examiner spécialement, afin d'en comparer les résultats à ceux des deux précédentes, et de démontrer que lors même qu'on l'adopte, le mouvement de rotation indéfiniment accéléré (1)

(1) J'appellerai toujours ainsi dans ce Mémoire, le mouvement qui résulte dans certains cas de l'action mutuelle, soit de conducteurs voltaïques, soit d'un

est impossible, comme dans les deux autres hypothèses, lorsque la portion de conducteur voltaïque qui agit sur l'aimant forme un circuit solide et fermé.

Ces trois hypothèses offrent d'ailleurs un exemple frappant de la possibilité où l'on est souvent de remplacer un système de forces, agissant sur un assemblage solide de points matériels, par un autre système de forces toutes différentes, mais dont l'ensemble produit absolument les mêmes effets d'équilibre et de mouvement sur cet assemblage solide. C'est ainsi que, quand un corps est plongé dans un liquide pesant, on peut sans rien changer aux conditions d'équilibre ou de mouvement de ce corps, substituer au système des pressions que le fluide exerce sur sa surface, un système de forces verticales appliquées de bas en haut à toutes les particules de ce corps, et dont chacune est représentée par le poids d'un volume du liquide égal au volume de la particule du corps sur laquelle cette force est censée agir.

La condition nécessaire et suffisante pour que deux systèmes de forces appliquées ainsi à un assemblage solide, soient équivalens, consiste, comme on sait, dans six équations, dont les trois premières expriment que les sommes

---

conducteur et d'un aimant, et qui présente cette circonstance singulière, que la vitesse du conducteur ou de l'aimant mobile va toujours croissant, jusqu'à ce que les frottemens et la résistance des milieux mettent des bornes à son accroissement, et qu'alors elle reste constante, malgré ces frottemens et ces résistances; en sorte, qu'il est prouvé par l'expérience qu'il y a dans ce cas une production continuelle de force vive, quelle qu'en soit la cause.

des composantes des forces parallèles à trois axes, pris à volonté, sont les mêmes dans les deux systèmes; et les trois autres, que les sommes des momens des mêmes forces, autour des mêmes axes, sont aussi égales dans les deux systèmes.

En représentant par $d\omega$ un élément de l'assemblage solide, par $Xd\omega$, $Yd\omega$, $Zd\omega$, les forces appliquées à cet élément, et par x, y, z, les coordonnées d'un point quelconque situé sur la direction de la résultante des forces X, Y, Z, lorsqu'elles en ont une, ces six équations consistent en ce que les expressions

$$\int X d\omega,\ \int Y d\omega,\ \int Z d\omega,$$

$$\int (Yz - Zy)\, d\omega,\ \int (Zx - Xz)\, d\omega,\ \int (Xy - Yx)\, d\omega,$$

ont les mêmes valeurs dans les deux systèmes.

J'observerai à ce sujet : 1° Que $d\omega$ représente une quantité infiniment petite du 1er, du 2e ou du 3e ordre, suivant que l'assemblage dont il s'agit est une ligne, une surface ou un volume;

2° Que j'ai dit que x, y, z, sont les coordonnées d'un point quelconque de la résultante des forces X, Y, Z, et non pas celles du point où se trouvent l'élément $d\omega$, parce que cet énoncé général, qui comprend le cas où l'on emploierait les coordonnées de l'élément $d\omega$, conduit à des résultats infiniment plus simples, lorsque toutes les forces appliquées au système solide, sont dirigées vers un même point fixe. Car alors, on peut prendre pour x, y, z, les coordonnées de ce point, et comme elles sont les mêmes pour tous les élémens $d\omega'$, il s'en suit que les sommes des momens peuvent s'écrire ainsi :

$$z\int \mathrm{Y}d\omega - y\int \mathrm{Z}d\omega,\ x\int \mathrm{Z}d\omega - z\int \mathrm{X}d\omega,\ y\int \mathrm{X}d\omega - x\int \mathrm{Y}d\omega,$$

de sorte que les trois premières intégrales qu'il faut calculer, pour poser les trois premières équations, donnent immédiatement les trois dernières, sans qu'il soit besoin d'aucune nouvelle intégration. Il est d'ailleurs bien évident qu'il est toujours permis de donner à x, y, z, cette généralité, puisque, quand il s'agit d'un système solide, on peut toujours supposer une force transportée à tel point qu'on veut de sa direction.

Avant de soumettre au calcul les trois hypothèses dont je viens de parler, pour en comparer les résultats, je crois d'abord devoir établir un théorème à l'aide duquel ces calculs se simplifient singulièrement. Concevons d'abord une surface quelconque GHK et un point donné M, rapporté à trois axes rectangulaires OX, OY, OZ (*fig.* 1). Si l'on mène par le point M une parallèle MP, à l'un des axes, à celui des x par exemple, qu'on fasse passer par cette parallèle deux plans formant un angle infiniment petit $d\varphi$, qui coupent dans la surface une bande GghH que nous représenterons par $d\sigma$, la surface GHK l'étant par σ, et dans le plan des yz le secteur PLl; qu'on prenne ensuite dans cette bande un élément $Nnn'N' = d^2\sigma$ dont la projection sur le plan des yz soit la portion infiniment petite $Qqq'Q'$ du secteur PLl, terminée par les parties QQ' et qq' des droites PL et Pl, et par les arcs de cercles Qq, $Q'q'$, dont le centre est en P; en nommant x, y, z, les coordonnées du point M, x', y', z', celles du point N, ρ la distance MN, u sa projection PQ sur le plan des yz; a, b, c, les trois angles que la normale NO au point N de la surface GHK forme avec les trois axes, i l'angle que la même normale fait avec la droite MN et enfin $d\sigma$ l'élément de surface $Nnn'N'$. On aura, comme on sait, pour la valeur du double du secteur PQq,

$$2\, PQq = u^2 d\varphi = (y - y')\, dz' - (z - z')\, dy',$$

$$\text{l'aire } Qqq'Q' = u\,du\,d\varphi,$$

$$\text{et l'aire } Nnn'N' = \frac{u\,du\,d\varphi}{\cos.\, a}.$$

Cela posé, si l'on divise le double du secteur PQq par le cube de la distance MN, on aura la quantité $\frac{u^2 d\varphi}{r^3}$ dont la différentielle, prise en regardant l'angle infiniment petit $d\varphi$ comme constant, sera égale à

$$\frac{[\,3\,(x - x')\cos.\, i - \rho \cos.\, a\,]\, d\sigma^2}{\rho^4},$$

en sorte que le théorème dont il est question, consiste en ce que

$$d\,\frac{u^2 d\varphi}{\rho^3} = \frac{[3\,(x - x')\,cos.\,i - \rho\,cos.\,a\,]\,d^2\sigma}{\rho^4}.$$

Pour le démontrer, il faut d'abord remarquer que, dans la différentielle indiquée dans le premier membre, $d\varphi$ est considéré comme constant, puisque cet angle reste le même pour toutes les parties de la bande GHhg, ce qui donne :

$$d\,\frac{u^2 d\varphi}{\rho^3} = \left(\frac{2udu}{\rho^3} - \frac{3u^2 d\rho}{\rho^4}\right) d\varphi = \frac{\left(2\rho - \frac{3ud\rho}{du}\right) udud\varphi.}{\rho^4}$$

Or, si l'on conçoit le plan tangent NST à la surface σ en son point N, plan qui rencontre MP en T, et si l'on abaisse du point M la perpendiculaire MS sur ce plan, on aura dans les deux triangles rectangles MSN, MST, ces deux valeurs de MS,

$$\text{MS} = \text{MN}\,cos.\,\text{SMN} = \text{MN}\,cos.\,\text{MNO} = \rho\,cos.\,i,$$

$$\text{MS} = \text{MT}\,cos.\,\text{SMT} = \text{MT}\,cos.\,a,$$

$$\text{d'où} \qquad \text{MT} = \frac{\rho\,cos.\,i.}{cos.\,a.}$$

Si l'on mène dans le plan MPQN, NR égale et parallèle à QP, qui est représentée par u, on aura

$$\text{MT} = \text{MR} + \text{RT} = x - x' + \text{RT}.$$

Mais en comparant le triangle rectangle NRT, avec le triangle différientiel semblable, dont les côtés sont du, dx', on a

$$\mathrm{RT} = \frac{udx'}{du},$$

donc
$$\mathrm{MT} = x - x' + \frac{udx'}{du}.$$

Par conséquent

$$\frac{udx'}{du} = \frac{\rho \cos. i}{\cos. a} - (x - x').$$

Mais l'équation

$$\rho^2 = u^2 + (x - x')^2$$

donne
$$\rho d\rho = udu - (x - x')\, dx',$$

d'où
$$\frac{ud\rho}{du} = \frac{u^2 - (x - x')\,\frac{udx'}{du}}{\rho}$$

$$= \frac{u^2 - \frac{(x - x')\rho \cos. i.}{\cos. a} + (x - x')^2}{\rho}$$

$$= \rho - \frac{(x - x') \cos. i.}{\rho \cos. a}.$$

Substituant cette valeur dans celle que nous avons trouvée pour $d\,\frac{u^2 d\varphi}{\rho^3}$, il viendra

$$d\,\frac{u^2 d\varphi}{\rho^3} = \frac{[3\,(x - x')\; cos.\; i. - \rho\; cos.\; a.]\; udud\varphi}{\rho^4\; cos.\; a.},$$

ou

$$d\,\frac{u^2 d\varphi}{\rho^3} = \frac{[3\,(x - x')\; cos.\; i - \rho\; cos.\; a]\; d^2\sigma}{\rho^4},$$

ce qu'il fallait démontrer.

La première application que nous ferons de ce théorème est relative à l'action mutuelle d'une molécule magnétique et d'un assemblage de très-petits espaces circonscrits chacun de tous côtés, par une couche infiniment mince des deux fluides magnétiques austral et boréal en quantités égales, et formant ainsi des élémens magnétiques, tels que les conçoivent les physiciens qui n'ont pas adopté ma théorie. C'est dans le Mémoire où M. *Poisson* a établi les principes et déduit les conséquences qui doivent résulter de l'action qu'on attribue aux fluides magnétiques, que je prendrai l'idée précise de ce que, dans cette hypothèse des deux fluides, on doit entendre par l'action des élémens magnétiques.

D'après les formules qu'on trouve à la page 22 de ce Mémoire, l'action d'un de ces élémens sur une molécule magnétique, dépend 1° de la position de la molécule par rapport à l'élément; 2° du volume infiniment petit occupé par l'élément que l'auteur représente par h^3, d'une quantité δ qu'on peut regarder comme l'intensité de son action, et des angles qui déterminent la direction de la droite suivant laquelle cette action est à son *maximum*; ces dernières quantités restant les mêmes pour un même élément, de quelque manière qu'on fasse varier la position de la molécule.

Concevons maintenant une surface σ de forme invariable telle que GHK (*fig.* 1), sur laquelle soient répandus et fixés à des intervalles égaux des élémens magnétiques, tels que le volume h^3 et la quantité δ soient les mêmes pour chacun d'eux, ce qu'on peut exprimer en disant que le magnétisme est uniformément distribué sur la surface, et qu'en outre dans chaque élément, la direction suivant laquelle l'action est la plus grande, soit perpendiculaire à cette surface. Après que les fluides magnétiques y auront été ainsi répartis, nous admettrons qu'ils sont retenus sur chaque élément par une force coërcitive suffisante pour qu'ils ne puissent se déplacer, ni par leur action mutuelle, ni par celle de la molécule magnétique placée hors de la surface sur laquelle nous allons considérer leur action.

En désignant par $a, b, c,$ les angles formés avec les trois axes des coordonnées par la normale NO à la surface σ menée par un point N de cette surface, pris dans l'intérieur d'un élément magnétique, par x', y', z', les coordonnées de ce point N, par x, y, z, celles d'un autre point M où se trouve placée une molécule magnétique, par ρ la distance

MN entre ces deux points, et par i l'angle MNO, compris entre cette droite et la normale NO au point N, on aura, d'après les formules trouvées par M. *Poisson*, page 22 de son premier Mémoire sur la théorie du magnétisme, pour les valeurs des trois composantes de la force attractive ou répulsive dirigée suivant la ligne r, qu'exerce l'élément magnétique sur la molécule M,

$$-\frac{h^3\,\delta\,[3\,(x-x')\,\cos.\,i-\rho\,\cos.\,a]}{\rho^4},$$

$$-\frac{h^3\,\delta\,[3\,(y-y')\,\cos.\,i-\rho\,\cos.\,b]}{\rho^4},$$

$$-\frac{h^3\,\delta\,[3\,(z-z')\,\cos.\,i-\rho\,\cos.\,c]}{\rho^4}.$$

Désignons par u, v, w, les projections de la ligne $r=$ MN sur les plans des yz, des zx et des xy, et par φ, χ, ψ, les angles que ces projections font avec les axes des y, des z et des x respectivement. Concevons que, par la coordonnée MP$=x$ du point M, on fasse passer deux plans formant un angle infiniment petit $d\varphi$, et cherchons l'action exercée sur la molécule M par tous les élémens magnétiques qui se trouvent sur la bande infiniment étroite comprise sur la surface σ entre ces deux plans. Nous pourrons concevoir cette bande décomposée en aires élémentaires, dont les projections sur le plan des yz aient pour valeur $udud\rho$, et ces aires élémentaires étant toujours représentées par $d^2\sigma$, nous aurons $d^2\sigma = \frac{udud\varphi}{\cos.\ a}$.

Si nous appelons k le petit intervalle constant qui sépare les élémens magnétiques distribués uniformément, comme nous l'avons dit sur la surface σ, $\frac{1}{k}$ sera le nombre de ces élémens placés les uns à la suite des autres sur une longueur égale à l'unité linéaire, et conséquemment $\frac{1}{k^2}$ le nombre de ceux qui sont contenus dans l'unité de surface. Il y en aura donc un nombre représenté par $\frac{d^2\sigma}{k^2}$ sur l'aire élémentaire que nous considérons. Il est clair qu'on aura leur action sur la molécule magnétique M en multipliant par cette quantité $\frac{d^2\sigma}{k^2}$ les valeurs des forces relatives à un seul élément données par M. *Poisson*, et que nous venons de rappeler. On aura ainsi pour l'action de tous les élémens qui occupent l'aire $d\sigma$ décomposée dans le sens des x,

$$-\frac{h^3\delta\left\{3(x-x')\cos.\ i-\rho\cos.\ a\right\}d^2\sigma}{k^2\rho^4},$$

ou, en appelant m le rapport $\frac{h}{k}$ des petites lignes h et k, rapport qui est, par hypothèse, un nombre constant pour tous les élémens magnétiques de la surface,

$$-\frac{m^2 h\delta \left\{ 3(x-x')\cos. i - \rho \cos. a \right\} d\sigma}{\rho^4}.$$

D'après le théorème que nous avons établi plus haut, cette expression devient

$$m^2 h\delta . d\frac{u^2 d\varphi}{\rho^3},$$

en l'intégrant dans toute l'étendue de la bande GghH et en nommant u_1 et ρ_1, u_2 et ρ_2, les valeurs de u et de u aux deux limites de cette bande, on obtient

$$m^2 h\delta \left(\frac{u^2{}_2\, d\varphi}{\rho_2{}^3} - \frac{u^2{}_1\, d\varphi}{\rho_1{}^3} \right)$$

pour l'action qu'exercent sur la molécule M les élémens magnétiques renfermés dans cette portion GghH de la surface σ comprise entre les deux plans menés par MP, qui forment l'angle $d\varphi$. En supposant la surface σ terminée par un contour fermé s, dont ces deux plans coupent les deux bords, les limites de cette intégrale déterminées par ρ_1 et u_1,

ρ_2 et u_2, seront les deux petits arcs de ce contour compris entre les plans menés par MP.

Si l'on suppose maintenant que la surface σ soit fermée de toutes parts comme la surface d'une sphère ou d'un ellipsoïde, cette bande formera une zône complète rentrant sur elle-même. Dans ce cas, on reviendra à la même limite d'où l'on est parti; on aura $\rho_2 = \rho_1$, $u_2 = u_1$, et l'expression précédente sera nulle; chacune de ces zônes n'ayant donc aucune action, la surface entière n'en aura pareillement aucune sur la molécule magnétique M, et par conséquent elle n'en aura pas non plus sur un assemblage quelconque de molécules, c'est-à-dire sur un aimant.

Mais si nous supposons que la surface ne soit pas dans ce cas, et qu'elle soit terminée par un contour fermé s, il faudra intégrer, par rapport à φ, les deux parties dont se compose l'expression

$$m^2 h\delta\, d\varphi \left(\frac{u_1^2}{\rho_1^3} - \frac{u_2^2}{\rho_2^3} \right)$$

respectivement dans les deux portions AN_1B, AN_2B, du contour s déterminées par les deux plans tangens PMA, PMB, menés par la ligne MP. Mais il revient au même d'intégrer $m^2 h\delta \frac{u^2\, d\varphi}{\rho^3}$ dans toute l'étendue du contour s; car si l'on met pour u et φ leurs valeurs en fonctions de ρ, déduites des équations de la courbe s, on voit qu'en passant de la partie AN_1B à la partie BN_2A, $d\varphi$ change de signe et que par conséquent les élémens de l'une de ces parties sont d'un signe contraire à ceux de l'autre.

D'après cela, si nous désignons par X la composante parallèle aux x de l'action totale qu'exerce l'assemblage des élémens magnétiques de la surface σ sur la molécule M, nous aurons

$$X = m^2 h\delta \int \frac{u^2 d\varphi}{\rho^3}$$

les quantités r, u et φ n'étant plus relatives qu'au contour S.

De même, en désignant par Y et Z les composantes parallèles aux y et aux z, nous aurons

$$Y = m^2 h\delta \int \frac{v^2 d\chi}{\rho^3}, \quad Z = m^2 h\delta \int \frac{w^2 d\psi}{\rho^3}.$$

D'après les expressions des forces X, Y, Z, on voit que l'action totale exercée par l'assemblage des élémens magnétiques de la surface σ sur la molécule M, est précisément la même que dans le cas où chaque élément ds du contour s, exercerait sur la molécule M une action représentée par une force dont les trois composantes parallèles aux axes seraient

$$m^2 h\delta \frac{u^2 d\varphi}{\rho^3}, \quad m^2 h\delta \frac{v^2 d\chi}{\rho^3}, \quad m^2 h\delta \frac{w^2 d\psi}{\rho^3}.$$

Car les sommes de ces composantes par tous les élémens ds, seront

$$m^2 h\delta \int \frac{u^2 d\varphi}{\rho^3}, \quad m^2 h\delta \int \frac{v^2 d\chi}{\rho^3}, \quad m^2 h\delta \int \frac{w^2 d\psi}{\rho^3},$$

c'est-à-dire identiques avec les forces X, Y, Z, auxquelles se réduit l'action de la surface σ. On voit aussi que cette action est indépendante de la forme de cette surface σ, de sorte qu'on peut faire varier cette forme à volonté, sans que l'action change, pourvu que le contour s reste le même.

Remarquons maintenant que $u^2 d\varphi$, $v^2 d\chi$, $w^2 d\psi$ représentent les projections sur les trois plans des coordonnées du double de l'aire du petit secteur MsS (*fig.* 2), qui a pour sommet le point M et pour base l'élément sS $= ds$ du contour s. En désignant par θ l'angle que fait la direction de cet élément ds avec celle de la ligne ρ, et par λ, μ, γ les angles que fait avec les axes la perpendiculaire au plan du secteur MsS, on aura $\rho ds \sin. \theta$ pour le double de l'aire de ce secteur, et pour ses projections

$$u^2 d\varphi = \rho ds \sin. \theta \cos. \lambda,$$
$$v^2 d\chi = \rho ds \sin. \theta \cos. \mu,$$
$$w^2 d\psi = \rho ds \sin. \theta \cos. \gamma.$$

Les trois forces parallèles aux axes qu'on suppose exercées par l'élément ds sur la molécule M, sont donc exprimées par

$$m^2h\delta\frac{ds\ sin.\ \theta\ cos.\ \lambda}{\rho^2},\ m^2h\delta\ \frac{ds\ sin.\ \theta\ cos.\ \mu}{\rho^2},$$

$$m^2h\delta\frac{ds\ sin.\ \theta\ cos.\ \gamma}{\rho^2},$$

comme elles sont respectivement proportionnelles aux cosinus des angles λ, μ, γ, et elles donnent pour résultante, une force ayant pour valeur $m^2h\delta\frac{ds\ sin.\ \theta}{\rho^2}$, et dirigée suivant la perpendiculaire au plan du secteur M*s*S qui forme, avec les trois axes, les angles λ, μ, γ. Ainsi chaque élément *s*S du contour *s*, produit sur la molécule M une force proportionnelle à la longueur de cet élément, au sinus de l'angle que sa direction fait avec celle de la droite SM, en raison inverse du carré de la distance SM, et perpendiculaire au plan du secteur M*s*S. Or, c'est précisément une force ainsi déterminée qui a lieu entre une molécule magnétique et un élément de fil conducteur, d'après la loi dont j'ai parlé au commencement de ce Mémoire, d'où il suit que l'action de la surface couverte d'élémens magnétiques dont il est ici question, sur une molécule magnétique, est identique à celle qu'un fil conducteur exercerait sur la même molécule, s'il était substitué au contour fermé qui circonscrit cette surface. C'est ainsi qu'on peut rendre raison de cette loi dans la première hypothèse, où tout doit être ramené à l'action mutuelle des molécules magnétiques australes et boréales.

La seconde application que nous ferons du théorème ci-dessus consiste à montrer qu'en considérant au contraire cette loi comme un fait général, indépendant de toute hypothèse, on trouve que l'action exercée par un solénoïde électro-dynamique sur une molécule magnétique, est identique à celle qu'un aimant dont les pôles seraient situés aux deux extrémités du solénoïde, exercerait sur la même molécule.

Pour cela, nous remarquerons d'abord qu'en conservant toutes les dénominations précédentes, et en désignant par μ un coefficient constant, la loi dont il est ici question consiste en ce que la force exercée par un élément de fil conducteur, sur une molécule magnétique, est exprimée par

$$\frac{\mu ds \sin. \theta}{\rho^2}$$

et que ses trois composantes parallèles aux axes des x, des y et des z, le sont respectivement par

$$\frac{\mu\, u^2 d\varphi}{\rho^3},\ \frac{\mu\, v^2 d\chi}{\rho^3},\ \frac{\mu\, w^2 d\psi}{\rho^3}.$$

Pour avoir celles d'un circuit fermé AGBH circonscrivant une portion d'une surface quelconque représentée par σ, il faudrait intégrer ces expressions dans toute l'étendue du circuit, ou, ce qui revient au même, en considérant par exemple la première, et concevant par la coordonnée PM les plans tangens PMA, PMB, intégrer de A en B la différence des deux valeurs de cette expression, qui sont relatives à deux élémens correspondans Gg, Hh, compris entre deux plans passant par PM, et formant entre eux l'angle $d\varphi$, en désignant pour u_2, r_2 et u_1, r_1, les valeurs de u_1, r, qui se rapportent à l'arc AHB et AGB, on a ainsi pour la composante cherchée

$$\mu\int\left(\frac{u_2^2}{\rho_2^3}-\frac{u_1^2}{\rho_1^3}\right)d\varphi=\mu\int d\varphi\int d\,\frac{u^2}{\rho^3}=\mu\int\int d\,\frac{u^2 d\varphi}{\rho^3},$$

la double intégrale qui entre dans cette expression, étant prise dans toute l'étendue de la surface terminée par le contour AGBH.

En vertu de notre théorème, cette valeur devient :

$$\mu\int\int\frac{[\,3\,(x-x')\cos.\,i-\rho\cos.\,a]\,d\delta}{\rho^4},$$

et si la surface est plane, et que ses dimensions soient assez petites pour qu'on n'en doive conserver dans le calcul que les premières puissances, il faudra regarder comme des quantités constantes, dans cette double intégrale, les droites x, ρ, et les angles a, i, on aura ainsi :

$$\frac{\mu\,[\,3\,(x-x')\cos.\,i-\rho\cos.\,a]}{\rho^4}\int\int d\delta,$$

or $\int\int ds$ est évidemment l'aire même de cette surface, en sorte qu'en la représentant par λ, on a

$$\frac{\mu\lambda[\rho \cos. a - 3(x - x')\cos. i]}{\rho^4},$$

pour la composante parallèle à l'axe des x de l'action exercée sur la molécule magnétique par le petit circuit qui circonscrit cette aire.

Le solénoïde étant un assemblage de tels circuits situés sur une ligne donnée dans des plans équidistans et perpendiculaires à cette ligne, si l'on nomme g la distance de deux plans consécutifs, et ds une portion infiniment petite de la ligne donnée, il faudra multiplier l'expression précédente par $\frac{ds}{\cos. g}$; mais il est aisé de voir que $ds \cos. i = d\rho$ et que $ds \cos. a = dx$, en sorte que l'action de la portion du solénoïde correspondante à ds, sera

$$-\frac{\mu\lambda}{g}\cdot\frac{\rho dx - 3(x - x')\rho d\rho}{\rho^4},$$

dont l'intégrale est

$$\frac{\mu\lambda}{g}\left[C - \frac{x - x'}{\rho^3}\right],$$

c'est-à-dire

$$\frac{\mu\lambda}{g}\left[\frac{x_1 - x'}{\rho_1^3} - \frac{x_2 - x'}{\rho_2^3}\right],$$

en représentant par x_1 et x_2 les abscisses des deux extrémités du solénoïde.

On trouvera de même pour les composantes parallèles aux axes des y et des z

$$\frac{\mu\lambda}{g}\left[\frac{y_1 - y'}{\rho_1^3} - \frac{y_2 - y'}{\rho_2^3}\right],$$

$$\frac{\mu\lambda}{g}\left[\frac{z_1 - z'}{\rho_1^3} - \frac{z_2 - z'}{\rho_2^3}\right].$$

Ces trois forces passent par la molécule magnétique, quelqu'hypothèse qu'on admette relativement au point d'application des forces élémentaires, puisque les courans du solénoïde forment des circuits fermés, et que nous démontrerons bientôt (pages 31-33), que dans ce cas les trois hypothèses conduisent identiquement aux mêmes résultats ; il est évident d'ailleurs qu'on peut les remplacer par six forces, savoir :

$$\frac{\mu\lambda}{g}\cdot\frac{x_1 - x'}{\rho_1^3},\ \frac{\mu\lambda}{g}\cdot\frac{y_1 - y'}{\rho_1^3},\ \frac{\mu\lambda}{g}\cdot\frac{z_1 - z'}{\rho_1^3},$$

$$-\frac{\mu\lambda}{g}\cdot\frac{x_2-x'}{\rho_2^3},\ -\frac{\mu\lambda}{g}\cdot\frac{y_2-y'}{\rho_2^3},\ -\frac{\mu\lambda}{g}\frac{z_2-z'}{\rho_2^3},$$

les trois premières ont une résultante égale à $\frac{\mu\lambda}{g\rho_1^2}$, parce que $\sqrt{(x_1-x')^2+(y_1-y')^2+(z_1-z')^2}=\rho_1$, et qui est dirigée suivant la droite qui joint la molécule magnétique à l'extrémité du solénoïde dont les coordonnées sont x_1, y_1, z_1, puisque les cosinus des angles, que sa direction forme avec les trois axes, sont proportionnels à x_1-x', y_1-y', z_1-z', et sont par conséquent, égaux à

$$\frac{x_1-x'}{\rho_1},\ \frac{y_1-y'}{\rho_1},\ \frac{z_1-z'}{\rho_1},$$

on trouve de même, pour la résultante des trois autres, une force égale à $\frac{\mu\lambda}{g\rho_2^2}$, dont les angles avec les trois axes sont

$$-\frac{x_2-x'}{\rho_2},\ -\frac{y_2-y'}{\rho_2},\ -\frac{z_2-z'}{\rho_2},$$

et qui est dirigée suivant la droite menée de la molécule magnétique à l'autre extrémité du solénoïde, mais qui, à cause des signes contraires des cosinus, est répulsive quand la première est attractive, et réciproquement.

Ces deux forces sont évidemment celles qu'exercerait sur la molécule un aimant dont les deux pôles seraient situés aux deux extrémités du solénoïde.

Comme un barreau aimanté peut toujours être considéré comme un assemblage de petits aimans, il suit de là qu'on peut faire dépendre l'action qu'il exerce sur une molécule magnétique, et par conséquent, sur un autre barreau, à la même force élémentaire que l'action découverte par M. *OErsted*, entre un fil conducteur et un aimant; mais qu'il faut, pour cela, considérer l'aimant comme un assemblage de courans électriques formant autant de solénoïdes que l'on y conçoit de petits aimans.

Revenons maintenant aux résultats par lesquels nous avons au contraire ramené l'action découverte par M. *OErsted* à celle d'une surface recouverte d'élémens magnétiques, qui ne peut avoir lieu que quand les fils conducteurs forment des circuits fermés, et remarquons que l'ensemble de la pile et de tous les conducteurs forment toujours un circuit ou plutôt un assemblage de circuits de ce genre; car les fils conducteurs et surtout la pile ne peuvent point être considérés comme une simple ligne formant un circuit fermé, mais doivent être comme une multitude de circuits fermés, passant par tous les points de chaque section transversale du fil, et s'écartant les uns des autres lorsqu'ils entrent dans la pile, pour en traverser successivement les plaques de cuivre et de zinc aux différens points des surfaces de ces plaques.

Il suit de cette considération et des calculs que nous venons de faire, que toutes les expériences où l'on fait agir sur un aimant mobile, considéré comme un assemblage de molécules magnétiques, un conducteur fixe de forme quelconque, ce conducteur, formant avec la pile des circuits complétement fermés, peuvent toujours être représentés, en supposant qu'on substitue à ces circuits des surfaces couvertes d'élémens magnétiques, comme nous venons de le voir. Au reste, les conducteurs forment toujours des circuits fermés, quand ils sont fixes.

Mais outre les actions d'un conducteur fixe sur un aimant, nous avons encore à considérer celles d'un aimant fixe sur une portion mobile de conducteur. Toutes les parties d'un aimant étant invariablement liées entr'elles, il faut que l'aimant soit en masse ou fixe ou mobile. Mais dans le conducteur, il peut y avoir des parties fixes et des parties mobiles. Nous ne supposerons jamais qu'une partie mobile, tout le reste mobile du circuit voltaïque total étant fixe, car on dirait pour chaque partie, soit mobile, soit fixe, ce que nous allons dire d'une seule.

Il faut distinguer avec soin deux cas : le premier dans lequel la partie mobile du conducteur forme à elle seule un circuit solide fermé, ou plutôt presque fermé; car il est impossible que la partie solide mobile le soit rigoureusement, puisqu'il faut que les deux extrémités communiquent avec le reste du circuit, et où la partie fixe forme aussi un circuit fermé; le second celui où la partie mobile, et par conséquent le reste du circuit ne forment pas, chacun en particulier, un circuit fermé, mais où c'est seulement leur ensemble qui l'est. Ainsi dans ma *Description d'un Nouvel Appareil Électro-dynamique*, les conducteurs des *fig.* 4, 5, 6, forment des circuits presque fermés, où il ne manque, pour qu'ils le soient complétement, que l'intervalle des deux pointes x et y, tandis que ceux des *fig.* 13, 14, 15, ne le sont pas.

Examen du cas où les portions du conducteur forment des circuits fermés.

Des deux portions du conducteur, l'une est toujours censée fixe et l'autre mobile. Discutons, dans chaque cas, tout ce qui doit résulter de l'action mutuelle de l'aimant et du circuit total. En concevant l'aimant fixe et une portion mobile que forme un circuit fermé, on peut, d'après ce que nous venons de voir, substituer à cette portion fermée une surface couverte d'élémens magnétiques uniformément distribués, comme nous l'avons dit. Alors l'action qu'une des molécules de l'aimant exerce sur cette portion mobile est la résultante de toutes les actions exercées sur les élémens magnétiques compris dans la surface, d'où il suit que les trois composantes X, Y, Z, parallèles aux axes, passent aussi par cette molécule. Ces trois composantes étant

$$m^2h\delta\int\frac{u^2d\varphi}{\rho^3},\ m^2h\delta\int\frac{v^2d\chi}{\rho^3},\ m^2h\delta\int\frac{w^2d\varphi}{\rho^3},$$

leurs momens relatifs aux trois axes des coordonnées, seront

$$\mathrm{X}y - \mathrm{Y}x = m^2h\delta\left(y\int\frac{u^2d\varphi}{\rho^3} - x\int\frac{v^2d\chi}{\rho^3}\right)$$

$$= m^2h\delta\int\frac{yu^2d\varphi - xv^2d\chi}{\rho^3},$$

$$\mathrm{Z}x - \mathrm{X}z = m^2h\delta\int\frac{xw^2d\psi - zu^2d\varphi}{\rho^3},$$

$$\mathrm{Y}z - \mathrm{Z}y = m^2h\delta\int\frac{zv^2d\chi - yw^2d\psi}{\rho^3}.$$

en observant que x, y et z, sont constantes dans les intégrations.

Dans le *Précis de la Théorie de Phénomènes électro-dynamiques*, j'ai donné les trois composantes et les trois momens de l'action exercée par un circuit voltaïque fermé, sur l'extrémité d'un solénoïde indéfini, dont on suppose l'autre extrémité infiniment éloignée, et il suit des formules auxquelles je suis parvenu, que les trois composantes de l'action exercée par ce circuit sur l'extrémité du solénoïde, qui sont égales et opposées à celles de l'extrémité du solénoïde sur le circuit, ont précisément les mêmes valeurs que les précédentes, excepté que le coefficient constant $m^2h\rho$ s'y trouve remplacé par $\frac{1}{2}ii'$, moitié du produit des deux intensités i et i' du courant du circuit et de ceux du solénoïde; en sorte qu'elles deviennent égales quand on suppose ce qui est permis $\frac{1}{2}\, ii' = m^2 h\rho$.

Mais les momens ne paraissent pas les mêmes, car les forces que j'ai données pour l'action du solénoïde sur le circuit, sont appliquées aux milieux des élémens de ce circuit. Cependant, nous allons démontrer que toutes les fois qu'il s'agit d'un circuit fermé, les valeurs des momens sont les mêmes, soit que les forces se trouvent appliquées aux élémens mêmes, soit qu'elles passent toutes par un point lié avec le circuit et placé à l'endroit où est la molécule magnétique ou l'extrémité du solénoïde.

En appelant x, y, z, les coordonnées de l'élément ds du circuit, les sommes des momens qui tendent à faire tourner le circuit autour de l'axe des z, lorsque les forces sont appliquées aux élémens ds, seront

$$\frac{1}{2}\, ii' \int \frac{y'' u^2 d\varphi - x'' v^2 dx}{\rho^3}.$$

Mais si les mêmes forces étaient appliquées au point dont les coordonnées sont x, y, z, point qu'on suppose lié avec le conducteur sans l'être avec la molécule magnétique, la somme des momens autour de l'axe des z, serait, comme nous l'avons vu, en supposant toujours $m^2 h\delta = \frac{1}{2}\, ii'$,

$$\frac{1}{2}\, ii' \int \frac{yu^2 d\varphi - xv^2 d\chi}{\rho^3}.$$

La différence entre ces deux sommes de momens, relatives aux deux hypothèses, est

$$\frac{1}{2}\, ii' \int \frac{(y''-y)\, u^2 d\varphi - (x''-x)\, v^2 d\chi}{\rho^3}.$$

Mais on a

$$u^2 d\varphi = (y''-y)\, dz'' - (z''-z)\, dy''$$
$$v^2 d\chi = (z''-z)\, dx'' - (x''-x)\, dz''.$$

En substituant ces valeurs dans l'expression précédente, elle devient

$$\frac{1}{2}\, ii' \int \frac{[(x''-x)^2+(y''-y)^2]\, dz'' - (z''-z)[(x''-x)\, dx''+(y''-y)\, dy'']}{\rho^3}$$

$$= \frac{1}{2}\, ii' \int \frac{[\rho^2-(z''-z)^2]\, dz'' - (z''-z)\, [\rho d\rho - (z''-z)\, dz'']}{\rho^3}$$

$$= \frac{1}{2}\, ii' \int \frac{\rho dz'' - (z''-z)\, d\rho}{\rho^2}$$

$$= \frac{1}{2}\, ii' \left(\frac{z''-z}{\rho} + const. \right)$$

Or, si le circuit est fermé, cette intégrale s'évanouit aux limites, de sorte que la différence dans les deux sommes de momens est nulle, et que ces deux sommes sont égales;

d'où il suit que la résultante des forces appliquées aux élémens ds du contour fermé s, passe par la molécule magnétique, comme dans l'hypothèse des élémens magnétiques. Ainsi, dans mon hypothèse où toutes les forces sont appliquées aux élémens ds, on a les mêmes composantes et les mêmes sommes de momens que quand on considère la surface σ couverte d'élémens magnétiques, mais cette identité n'a lieu qu'autant que le circuit est fermé.

Il existe une troisième manière de concevoir l'action mutuelle d'une molécule magnétique et d'un élément : c'est de supposer que cette action mutuelle produise à la fois deux forces de même intensité, toutes deux perpendiculaires au plan du petit secteur MsS (*fig.* 2), agissant en sens contraires, suivant deux directions parallèles, l'une passant par la molécule magnétique et l'autre par le milieu de l'élément, en sorte qu'elles forment un couple que les physiciens, qui adoptent cette manière de voir, regardent comme l'action électro-magnétique primitive. Dès lors, quand il s'agit d'un aimant mobile, si tout le circuit est fixe, on voit immédiatement que l'action de pareilles forces est identique par la définition même, avec celle qui résulte de la considération des élémens magnétiques, tandis que, quand il s'agit d'un aimant fixe et d'une portion mobile du circuit voltaïque fermé, elle est identique avec la mienne. Ainsi, tant qu'il est question d'un circuit fermé, et que, par conséquent, les forces résultantes de la considération des élémens magnétiques, et celles que j'admets entre les élémens de fils conducteurs, sont identiques, celles qui résulteraient de l'hypothèse du couple primitif, leur sont également identiques, soit que l'aimant soit fixe ou mobile, de sorte qu'il est impossible qu'aucune expérience puisse faire distinguer entre ces trois hypothèses laquelle doit être préférée, puisqu'elles donnent toutes également les mêmes forces et les mêmes momens.

Maintenant, nous pouvons démontrer que tout mouvement continu est impossible, soit pour l'aimant mobile, soit pour une portion de conducteur supposée mobile, toutes les fois que cette portion mobile du conducteur, et l'autre qui est fixe, forment, chacune en particulier, un circuit considéré comme fermé.

D'après ce qui précède, nous pouvons remplacer la partie mobile fermée par une surface σ couverte d'élémens magnétiques uniformément distribués, comme nous l'avons dit. L'action ne sera nullement altérée par cette substitution. Mais alors nous pouvons regarder les molécules de l'aimant et les élémens magnétiques de la surface σ, comme deux systèmes solides de points matériels, exerçant les uns sur les autres des forces attractives et répulsives, dirigées suivant les droites qui les joignent et fonctions des distances (puisqu'elles sont en raison inverse des carrés de ces distances).

Donc, si ces forces produisent le mouvement, le principe de la conservation des forces vives aura lieu pour les deux systèmes. En vertu de ce principe, si chacun de ces systèmes n'a que la liberté de tourner autour d'un point ou d'un axe fixe auquel il soit lié, ce qui est le cas de toutes les expériences, les vitesses que prendront leurs différens points ne pourront pas croître indéfiniment. Il faut, en effet, d'après le principe, que la somme des forces vives, c'est-à-dire, la somme des produits des masses en mouvement par les carrés de leurs vitesses, soit constante, quand il n'y a ni frottemens ni résistances, et qu'elle diminue sans cesse quand il y en a. D'où il suit que les vitesses ne peuvent pas croître indéfiniment, ni même finir par devenir constantes, puisque l'effet des frottemens est de les diminuer sans cesse. Les deux systèmes ne peuvent donc pas prendre de mouvement qui soit indéfiniment continu, avec l'accélération nécessaire pour leur faire vaincre les résistances et les frottemens qu'ils éprouvent; ils doivent donc tendre au repos et finir par s'arrêter dans une position d'équilibre déterminée, après avoir oscillé autour d'elle, position qu'on démontre être celle où la somme des forces vives est un *maximum* entre toutes les valeurs qu'elle prend aux environs de cette position, dans un mouvement quelconque.

Mais nous avons établi plus haut que l'action mutuelle de l'aimant et d'un circuit voltaïque fermé, est précisément la même que celle de cet aimant et de la surface σ couverte d'élémens magnétiques, et ayant ce circuit pour contour. Donc aussi, l'impossibilité d'un mouvement continu et accéléré, soit de l'aimant, soit de la portion mobile du conducteur, est démontrée.

D'après ce que nous avons dit précédemment, cette proposition a lieu, quelle que soit l'hypothèse qu'on adopte sur le point d'application des forces élémentaires qui s'exercent entre les molécules de l'aimant et les élémens du fil conducteur.

C'est là le théorème que je m'étais spécialement proposé de démontrer dans cette lettre; et l'on voit que la démonstration consiste à ramener toute action entre un aimant et une portion fermée de conducteur à des forces qui sont simplement fonctions des distances des points entre lesquels elles s'exercent, et dirigées suivant les droites qui joignent ces points, parce qu'il est reconnu par tous les mathématiciens que de telles forces ne peuvent jamais produire de mouvement avec accélération continue, autour d'axes ou de points fixes quelconques.

Je concluerai en outre des calculs précédens qu'il n'est pas possible de distinguer par les phénomènes que présentent les circuits fermés, laquelle des trois hypothèses est la véritable, puisqu'elles donnent toutes les mêmes résultats. On ne peut espérer de décider la question qu'en passant aux cas où les deux portions, l'une fixe, l'autre mobile du courant voltaïque, ne forment pas des circuits fermés. Je vais maintenant en dire quelques mots.

L'expérience prouve alors qu'en supposant un aimant fixe, on peut obtenir un mouvement continu autour d'un axe de la partie mobile du conducteur qui ne forme pas un circuit fermé, pourvu que les deux extrémités ne soient pas dans cet axe.

Ce mouvement, découvert par M. *Faraday*, est décrit et expliqué dans le *Manuel d'Électricité dynamique*, de M. *Demonferrand*.

Voyons ce qui résulte de ce phénomène, relativement aux trois hypothèses précédentes.

L'existence du mouvement dont il s'agit autour d'un axe, quand même cet axe passerait par les pôles de l'aimant considérés comme des molécules magnétiques, prouve que les forces élémentaires qu'exercent ces molécules sur les élémens du fil conducteur, ne passent pas par les points où ces pôles sont situés. La première hypothèse est donc exclue par ce fait, et je n'aurai, par conséquent, plus à en parler.

Mais les deux autres subsistent et donnent des effets identiques, puisqu'il en résulte également des forces agissant sur la partie mobile du conducteur, et passant par les milieux des élémens sur lesquels elles s'exercent. Cette expérience ne prouve donc rien encore en faveur de l'une ou l'autre hypothèse.

Mais quand l'aimant est mobile, ainsi qu'une portion non fermée du conducteur, et qu'on examine le mouvement de l'aimant, il semble d'abord qu'il doit y avoir une différence entre le mouvement que doit prendre l'aimant dans l'hypothèse du couple primitif et celui qu'il doit prendre dans la mienne. Car dans celle du couple primitif, les forces qui meuvent l'aimant passent par ses molécules ; dans la mienne, elles passent par les élémens. Les momens de ces deux systèmes de forces considérés dans l'action mutuelle de l'aimant et de la portion mobile non fermée diffèrent alors, puisque l'intégrale qui exprime la différence de ces momens, savoir :

$$\frac{1}{2}\, ii'\left(\frac{z''-z}{\rho}+const.\right)$$

devient

$$\frac{1}{2}\, ii'\left(\frac{z_2''-z}{\rho_2}-\frac{z_1''-z}{\rho_1}\right)$$

z_1'', ρ_1 et z''_2, ρ_2 appartenant aux deux extrémités de la portion non fermée de conducteur, et que cette intégrale n'est pas nulle, si ce n'est dans le cas où les deux extrémités de cette portion se trouvent en ligne droite avec la molécule.

Mais ce n'est pas seulement la portion mobile de circuit voltaïque qui agit alors sur l'aimant, il faut aussi avoir égard à l'action qu'exerce sur lui la portion fixe de circuit dans laquelle la pile est comprise. Cette considération change entièrement les conséquences qu'on pourrait déduire de la différence des mouvemens que nous venons de calculer, puisque cette différence n'a plus lieu pour le circuit entier formé de ces deux portions, et qui est nécessairement fermé. Quand on fait attention à cette circonstance, on voit que les mouvemens produits doivent être les mêmes dans les deux hypothèses, et que, pour se faire une idée nette de ces mouvemens, il faut encore distinguer deux cas, celui où l'aimant, dans le mouvement qu'il prend pour aller à la position où il s'arrêterait en équilibre après avoir oscillé autour d'elle, si tout le circuit voltaïque était fixe, dérange la portion mobile du conducteur, et celui où il la laisse à la place qu'elle occupait; ce dernier est identique avec celui où le conducteur entier est fixe, et ainsi il ne peut donner lieu à un mouvement continu. Mais si l'aimant dans son mouvement dérange la portion mobile du conducteur, sa propre position d'équilibre sera aussi déplacée, et il pourra arriver qu'elle s'éloigne toujours de manière que l'aimant n'y parvienne jamais; c'est là la cause des mouvemens continus, ou indéfiniment accélérés qu'il peut prendre dans les divers cas où il déplace ainsi la partie mobile du circuit voltaïque par son propre mouvement. Ce déplacement peut avoir lieu de diverses manières, suivant que le courant de la partie mobile du circuit a lieu dans un fluide conducteur sur lequel flotte l'aimant, qu'il traverse l'aimant lui-même, ou qu'il est conduit par un fil de cuivre lié à cet aimant et mobile avec lui; j'ai discuté le premier de ces trois cas, dans une lettre à M. le professeur *Gherardi*, qu'on trouvera en forme de supplément à la suite de ce Mémoire, je me bornerai ici à examiner les deux autres, dans lesquels l'aimant et la portion mobile du circuit voltaïque, forment un système dont toutes les parties sont invariablement liées entre-elles. Pour cela, je remarquerai d'abord que dans un barreau aimanté EF (*fig.* 1), il y a deux points A et B, tels que la résultante de toutes les forces exercées par les élemens magnétiques du barreau EF, sur une molécule magnétique M, est sensiblement la même que celle de deux forces appliquées en M et agissant suivant les droites MA, MB, l'une attractive et l'autre répulsive, et en raison inverse du carré de ces droites, en sorte qu'en faisant AM $= r$ et BM $= r'$, si la force MU suivant MA est $\frac{\mu}{r^2}$, la force MV suivant MB sera $-\frac{\mu}{r'^2}$.

Les points A et B sont ce qu'on nomme les pôles de l'aimant EF.

La réduction de toutes les forces exercées par les élémens magnétiques sur la molécule magnétique M, à ces deux forces $\frac{\mu}{r^2}$ et $-\frac{\mu}{r'^2}$, n'est au reste qu'une approximation, mais elle suffit pour l'explication des phénomènes généraux que présentent les aimans. M. *Poisson* a démontré qu'on doit l'admettre rigoureusement pour chaque élément magnétique.

Les deux pôles d'un tel élément étant situés sur son axe à une distance très-petite, qu'on peut prendre à volonté dans l'intérieur de l'élément, en faisant varier la constante μ en raison inverse de cette distance, pourvu que celle-ci reste toujours infiniment petite, relativement à la distance de l'élément magnétique au point sur lequel il agit.

Supposons maintenant, qu'au lieu d'agir sur la molécule M (*fig.* 1), l'aimant EF agisse sur une portion infiniment petite de fil conducteur mM (*fig.* 2), dont la direction soit quelconque.

Si l'on fait toujours AM $= r$, BM $= r'$, qu'on nomme ω et ω' les angles AMT, BMT, formés par ces droites avec la direction MT de la petite portion mM de fil conducteur, et ds la longueur de cette petite portion, et qu'on fasse passer par les mêmes pôles A, B, du barreau EF et par Mm, les plans AmM, BmM, d'après la formule dont il est ici question, la résultante de toutes les forces exercées par les élémens magnétiques du barreau EF sur mM, sera la même que celle de deux forces OU, OV, appliquées à mM vers son milieu O, perpendiculaires aux plans AmM, BmM, réciproquement proportionnelles aux carrés des distances AM, BM, et en raison directe des sinus des angles AMT, BMT, et de la longueur de mM, en sorte que les valeurs de ces forces sont $\frac{\mu ds \sin. \omega}{r^2}$, $-\frac{\mu ds \sin. \omega'}{r'^2}$.

La réduction de toutes les forces exercées par les élémens magnétiques du barreau EF sur mM, à ces deux forces $\frac{\mu ds \sin. \omega}{r^2}$, $-\frac{\mu ds \sin. \omega'}{r'^2}$, doit aussi être considérée comme une approximation suffisante pour l'explication des phénomènes, et qui, d'après des calculs dont il ne peut être question ici, puisque nous regardons ces forces comme déduites de l'expérience, serait rigoureusement exacte pour chaque élément magnétique, en lui assignant deux pôles, comme nous l'avons dit plus haut.

Au reste, c'est en la supposant vraie pour les deux pôles d'un assez petit aimant de forme parallèlipipède, que M. *Biot* l'a vérifiée dans les expériences déjà citées, et qu'elle s'est trouvée aussi exacte qu'on pouvait le désirer.

Voici maintenant comment j'ai transformé les valeurs de ces forces.

Si l'on nomme dv le double de l'aire du petit secteur $m\text{A}\text{M}$, dont la base $m\text{M} = ds$, et dont la hauteur est évidemment $r\ sin.\ \omega$, on aura $dv = rds\ sin.\ \omega$, et comme la valeur $\frac{\mu ds\ sin.\ \omega}{r^2}$ de la force OU, peut s'écrire ainsi :

$$\frac{\mu rds\ sin.\ \omega}{r^3}, \text{ elle deviendra } \frac{\mu dv}{r^3}.$$

La composante de cette force suivant une droite OS, qui forme avec la direction de OU, un angle quelconque ε, a donc pour valeur $\frac{\mu dv\ cos.\ \varepsilon}{r^3}$, mais $dv\ cos.\ \varepsilon$ est le double de la projection de l'aire AmM, sur le plan perpendiculaire à la droite OS, d'où il suit qu'en nommant du, le double de cette projection, on a

$$\frac{\mu du}{r^3},$$

pour la composante suivant OS; en nommant du' le double de la projection de l'aire BmM, sur le même plan perpendiculaire à OS, on trouve de même, pour la composante de OV suivant la même droite OS,

$$-\frac{\mu du'}{r'^3},$$

d'où il suit que la force totale suivant OS est

$$\frac{\mu du}{r^3}-\frac{\mu du'}{r'^3}.$$

Cherchons maintenant le moment de rotation de la petite portion de fil conducteur mM (*fig.* 3) autour de l'axe GH du barreau EF, c'est-à-dire, de la droite qui passe par ses pôles A et B. Pour cela, faisons passer un plan par GH et par le milieu O de mM, et prenons la valeur de la composante OS perpendiculaire à ce plan; du étant le double de la projection AnN de AMm sur ce même plan, aura pour valeur le produit du carré du rayon vecteur AN $= r$ par l'angle nAN : or, en nommant θ l'angle GAn, on a évidemment $n\text{AN} = d\theta$, et par conséquent $du = r^2 d\theta$, ce qui réduit le premier terme de $\frac{\mu du}{r^3}-\frac{\mu du'}{r'^3}$ valeur de la force OS, à $\frac{\mu d\theta}{r}$. Pour avoir le moment de rotation résultant de ce terme, il faut le multiplier par la perpendiculaire OP $= r\, sin.\, \theta$, et l'on voit que la distance r disparaît de l'expression de ce moment qui est

$$\mu d\theta\, sin.\, \theta.$$

On trouve de même qu'en nommant θ' l'angle GBn, la valeur du second de la même force se réduit à $-\frac{\mu d\theta'}{r'}$, qu'il faut multiplier par OP $= r' \sin.\, \theta'$, pour avoir le moment qui en résulte, et qui est par conséquent égal à

$$- \mu d\theta' \sin.\, \theta',$$

on a donc

$$\mu\, (d\theta \sin.\, \theta - d\theta' \sin.\, \theta'),$$

pour le moment total avec lequel l'aimant tend à faire tourner autour de son axe la petite portion mM de fil conducteur.

La force totale exercée sur mM par l'aimant EF, et qui se décompose dans les deux forces OU, OV (*fig.* 2), peut résulter de différentes manières, de forces exercées sur mM par les différents points de l'aimant, suivant les droites qui joignent ces points à cette portion mM de fil conducteur, supposée infiniment petite, et avec la condition que celle-ci réagisse avec des forces égales sur les mêmes points et suivant les mêmes droites. Il faut seulement, pour que les forces OU, OV, puissent être perpendiculaires aux plans AmM, BmM, que parmi celles qui émanent de chaque point de l'aimant et agissent sur mM, les unes soient attractives, et les autres répulsives, ce qui a lieu, comme on sait, pour toutes les forces exercées par les divers points des aimans. Cette condition de l'action égale à la réaction, suivant les mêmes droites, entre mM et tous les points de l'aimant, est une suite nécessaire de ce que les molécules des fluides impondérables, ne peuvent agir que comme celles des corps pondérables et doivent, comme celles-ci, lors même qu'elles sont en mouvement, exercer à chaque instant la même action que si elles étaient en repos là où elles se trouvent à cet instant. On sait d'ailleurs, que le mouvement des deux fluides électriques dans le circuit voltaïque, s'opère par une série de compositions et de décompositions du fluide neutre, sans qu'il en sorte ou en entre dans le circuit, puisqu'on peut le recouvrir d'un vernis isolant, sans rien changer aux actions qu'il exerce.

Dès-lors, on ne peut se refuser à cette conséquence de l'égalité entre l'action et la réaction suivant les mêmes droites, et de tout ce qu'on sait d'ailleurs des lois générales de la nature, que si l'on lie mM (*fig.* 3), avec l'aimant EF, de manière à en composer un système de forme invariable, leur action mutuelle ne pourra produire aucun mouvement dans ce système; ce sera comme si cette action n'existait pas, puisque toutes les forces dont elle résulte se trouvent égales et opposées deux à deux, appliquées à des points invariablement liés entre eux, et par conséquent en équilibre.

Supposons, comme dans les expériences faites à ce sujet, que la petite portion mM et le barreau EF, ne puissent se mouvoir qu'en tournant autour d'un axe quelconque : s'ils sont liés invariablement, tout sera immobile; si on rompt la liaison qui les unit, ils tourneront en sens contraires autour de cet axe avec des momens égaux en intensité, et par conséquent, avec des vitesses réciproquement proportionnelles à leurs momens d'inertie, pris par rapport à l'axe autour duquel ils sont assujétis à tourner.

Si nous prenons pour cet axe, l'axe GH de l'aimant EF, nous aurons

$$\mu\,(d\theta \sin.\,\theta - d\theta' \sin.\,\theta')$$

pour le moment de rotation de mM autour de GH, et

$$-\,\mu\,(d\theta \sin.\,\theta - d\theta' \sin.\,\theta')$$

pour celui de l'aimant autour de ce même axe.

Si l'on intègre ce dernier pour un arc $L_1\, L_2$ de fil conducteur, en représentant par θ_1, θ_2, les valeurs de θ aux points L_1, L_2, et θ'_1, θ'_2, celles de θ' aux mêmes points, on aura pour le moment de rotation imprimé à l'aimant par l'arc $L_1\, L_2$,

$$\mu\,(\cos.\,\theta_2 - \cos.\,\theta_1 - \cos.\,\theta'_2 + \cos.\,\theta'_1).$$

Dans la figure 4,

$$\theta_1 = \mathrm{GAL}_1,$$

$$\theta_2 = GAL_2,$$

$$\theta'_1 = GBL_1,$$

$$\theta'_2 = GBL_2.$$

Il suit de cette valeur, que le moment de rotation imprimé à l'aimant autour de son axe GH, par l'arc de fil conducteur L_1OL_2, est indépendant de la forme et de la grandeur de cet arc, et ne dépend que de la situation de ces extrémités L_1 et L_2 à l'égard des pôles A et B du barreau EF.

Si on substitue à L_1OL_2 un autre arc L_1KL_2, terminé aux mêmes points L_1L_2, le moment sera exactement le même, pourvu qu'ils soient parcourus par le courant électrique dans le même sens, par exemple, de L_1 en L_2, comme l'indiquent les flèches de la figure 4.

Mais si l'on change le sens du courant dans L_1KL_2 en le faisant revenir de L_2 en L_1, comme il est marqué par les flèches de la figure 5, l'ensemble de L_1OL_2 et de L_2KL_1, qui forme le circuit fermé $L_1OL_2KL_1$, n'aura plus aucune action pour faire tourner l'aimant autour de son axe GH, puisque les deux parties dont il se compose, exerceront alors sur l'aimant deux momens de rotation égaux et de signes contraires ; c'est ce qui résulte également de la valeur générale

$$\mu(\cos.\,\theta_2 - \cos.\,\theta_1 - \cos.\,\theta'_2 + \cos.\,\theta'_1),$$

puisque pour un circuit fermé, les deux limites L_1, L_2 étant à un même point, on a

$$cos.\ \theta_2 = cos.\ \theta_1\ ,$$
$$cos.\ \theta_2' = cos.\ \theta_1'\ ;$$

et cela, soit que l'aimant soit hors du circuit, ce qui donne

$$\theta_2 = \theta_1\ ,$$
$$\theta'_2 = \theta'_1\ ,$$

soit qu'il soit dans l'intérieur du circuit, auquel cas

$$\theta_2 = \theta_1 + 2\pi\ ,$$
$$\theta'_2 = \theta'_1 + 2\pi.$$

C'est ce que les physiciens de Genève ont vérifié par les expériences les plus exactes et les plus multipliées : ils cherchèrent avec des appareils extrêmement mobiles et en variant, de toutes les manières possibles, la forme des circuits fermés, à faire tourner l'aimant autour de son axe par l'action de ces circuits, sans parvenir à produire ce mouvement.

Il est évident qu'en prouvant par l'expérience que, quelle que soit la forme du circuit fermé, son action est toujours nulle, on constate en même temps l'exactitude de ce résultat du calcul, que le moment de rotation imprimé par un arc quelconque, ne dépend ni de sa forme, ni de sa grandeur, mais seulement de la situation de ses extrémités relativement aux pôles de l'aimant; car si les actions des deux circuits fermés $L_1OL_2KL_1$ et $L_1OL_2K'L_1$ (*fig.* 6), qui ont une partie commune L_1OL_2, sont toutes deux nulles, il faut bien que les actions exercées par les arcs L_2KL_1, $L_2K'L_1$ soient égales, puisqu'elles font également équilibre à l'action de L_1OL_2.

Lorsque M. *Faraday* eut annoncé, que, d'après ses expériences, il était impossible de faire tourner un aimant autour de son axe par l'action d'un fil conducteur, je m'assurai aisément que cela venait de ce que la réunion des fils conducteurs et de la pile, forme nécessairement un système de circuits fermés, dont nous venons de voir que l'action rotatoire est toujours nulle. Alors il me vint l'idée de faire passer une portion du courant par l'aimant; comme cette portion forme, dans ce cas, un système invariable avec l'aimant, elle n'exerce plus aucune action pour le mouvoir : c'est comme si elle était anéantie; d'où il suit que le reste du circuit, qui exerçait une action égale et opposée à la sienne, agit seul alors et fait tourner l'aimant, à moins que le moment

$$\mu\,(cos.\,\theta_2 - cos.\,\theta_1 - cos.\,\theta'_2 + cos.\,\theta'_1)$$

ne fut par hasard nul.

Les points L_1, L_2, sont dans ce cas celui où le courant entre dans l'aimant et celui où il en sort.

J'observai à ce sujet que, si ces points d'entrée et de sortie L_1, L_2 (*fig.* 7) étaient dans l'axe de l'aimant, il ne pouvait y avoir de rotation, parce qu'alors

$$\theta_1 = 0, \ \theta'_1 = 0, \ \theta_2 = \pi, \ \theta'_2 = \pi,$$

ce qui donne

$$\cos.\theta_2 - \cos.\theta_1 - \cos.\theta'_2 + \cos.\theta'_1 = -1 - 1 + 1 + 1 = 0.$$

Je remarquai bientôt après, dans la lettre à M. *Faraday*, imprimée dans les *Annales de physique et de chimie*, qu'on explique de même le fait qu'il avait observé, savoir : qu'au lieu de faire passer une portion du courant par l'aimant, il suffit pour obtenir la rotation du barreau autour de son axe, de faire passer le courant par une portion de conducteur métallique qui lui soit invariablement lié, et dont les deux extrémités ne soient pas dans l'axe, parce que cette portion formant avec l'aimant un système invariable, n'agit plus sur lui, et que le reste du circuit, qui a les mêmes extrémités, le fait tourner.

Il y a long-temps que j'ai dit, dans les ouvrages que j'ai publiés sur ce sujet, que d'après la valeur du moment de rotation donnée plus haut, le mouvement de l'aimant restait le même, quelque forme qu'on donnât à cette portion du circuit; dire qu'il faut négliger l'action de cette partie, parce qu'elle ne varie pas quand on en change la forme, c'est comme si l'on disait qu'il faut négliger l'action calorifique d'une portion de l'enveloppe de chaleur constante, puisque cette action calorifique ne dépend pas de la forme de cette portion.

Voici quelques conséquences qui résultent immédiatement des considérations et des calculs précédens, qui ne faisaient pas d'abord partie de ce Mémoire, et que j'y ajoute pendant qu'on l'imprime, parce que ces conséquences sont en général celles que M. *Pouillet* a obtenues des expériences qu'il a faites sur ce sujet en 1827.

Soit qu'on veuille faire tourner une portion de fil conducteur autour de l'axe d'un aimant, ou un aimant autour de son axe par l'action de la portion du circuit total, qui ne lui est pas unie en un système invariable, il est commode de rendre l'axe de l'aimant vertical, et de faire arriver ces portions de fil conducteur dans une coupe O, située sur le prolongement GO de l'axe de l'aimant; cette coupe est fixe dans le premier cas, soit qu'elle soit ou ne soit pas en communication avec l'aimant, qui est aussi supposé fixe; mais dans le second elle doit, dans la disposition que représente la figure, être soudée à l'aimant et mobile avec lui.

Quand le point L_1 est sur le prolongement de l'axe de l'aimant, on a

$$\theta_1 = 0, \; \theta'_1 = 0,$$

d'où il suit que

$$\cos. \theta_1 - \cos. \theta'_1 = 1 - 1 = 0,$$

qu'ainsi le moment de rotation imprimé au fil L_1L_2, par l'aimant est

$$-\mu\,(cos.\,\theta_2 - cos.\,\theta'_2),$$

et celui qui l'est à l'aimant par toute la partie du circuit qui n'y est pas liée, est

$$\mu\,(cos.\,\theta_2 - cos.\,\theta'_2).$$

θ_2 et θ'_2 étant les deux angles OAL_2, OBL_2.

Quand les choses sont disposées comme dans la figure 8, $cos.\,\theta'_2 > cos.\,\theta_2$, en sorte que le premier moment est

$$\mu\,(cos.\,OBL_2 - cos.\,OAL_2),$$

et le second

$$-\mu\,(cos.\,OBL_2 - cos.\,OAL_2).$$

Tant que le point L_2 est au-dessus du plan horizontal, passant par le pôle A, ces valeurs ne contiennent que la différence des deux cosinus, et deviennent très-petites, quand le point L_2 est près du prolongement GO de l'axe de l'aimant, parce qu'alors ces deux cosinus diffèrent peu de l'unité.

Quand le point L_2 est dans le plan horizontal, dont nous venons de parler, $cos.\ OAL_2 = 0$; on a donc seulement pour les valeurs des momens

$$\mu\, cos.\ OBL_2,$$

et

$$-\mu\, cos.\ OBL_2.$$

Lorsque le point L_2 tombe entre ce plan horizontal et celui qui passe par l'autre pôle B, l'angle OAL_2 devient obtus, comme on le voit dans la figure 9, on a alors $cos.\ OAL_2 = - cos.\ BAL_2$, et comme on peut écrire ABL_2 au lieu de OBL_2, on a pour les momens

$$\mu\, (cos.\ ABL_2 + cos.\ BAL_2),$$

et

$$-\mu\, (cos.\ ABL_2 + cos.\ BAL_2).$$

Les valeurs de ces momens, contenant la somme au lieu de la différence des deux cosinus, sont beaucoup plus grandes que dans le premier cas.

Si l'on suppose que le point L_2, restant toujours à la même distance de l'axe de l'aimant, réponde successivement à divers points de la longueur de cet axe, il est aisé de voir à la seule inspection de ces valeurs : 1° qu'elles atteindront leur *maximum* quand le point L_2 répondra au milieu de l'aimant; elles deviendront alors

$$2\mu \cos. \text{ABL}_2,$$

et

$$-2\mu \cos. \text{ABL}_2.$$

2° qu'elles seront les mêmes à égales distances au-dessus et au-dessous de ce milieu : c'est ainsi que quand le point L_2 se trouvera dans le plan horizontal, passant par le pôle B, on aura, pour ces valeurs,

$$\mu \cos. \text{BAL}_2,$$

et

$$-\mu \cos. \text{BAL}_2,$$

qui sont les mêmes que nous avons trouvées, quand L_2 est dans le plan horizontal passant par le pôle A. Enfin, lorsque le point L_2 se trouve comme on le voit dans la fig. 10, l'angle ABL_2 devient obtus, $\cos. \text{ABL}_2 = -\cos. \text{HBL}$, et l'on a pour les deux momens

$$\mu (\cos. \text{BAL}_2 - \cos. \text{HBL}_2),$$

et

$$-\mu (\cos. \text{BAL}_2 - \cos. \text{HBL}),$$

qui sont évidemment égales à celles que nous avons trouvées, quand L_2 est situé précisément de la même manière au-dessus du plan horizontal passant par le pôle A.

Il suit de ces calculs, que le sens de la rotation reste toujours le même, quelle que soit la position du point L_2, mais qu'après avoir atteint son *maximum*, quand le point L_2 est vis-à-vis du milieu de l'aimant, elle va en diminuant à mesure qu'il s'en écarte, et devient très-faible et susceptible d'être arrêtée par les frottemens, quand le point L_2 est près de l'axe de l'aimant, et hors de l'intervalle compris entre les deux plans horizontaux, menés par les pôles A et B.

Si nous considérons en particulier le cas où le point L_2 est dans le plan horizontal passant par le milieu K (*fig.* 11) de l'intervalle AB des deux pôles, alors les momens sont

$$2\mu \cos. BAL_2,$$

et

$$-2\mu \cos. BAL_2,$$

valeur d'autant plus grande, pour un même aimant, que la distance KL_2 est plus petite, et par conséquent aussi, l'angle BAL_2; c'est pour cela que, quand l'aimant est fixe, et que L_1ML_2 est une portion mobile de fil conducteur, celle-ci tourne d'autant plus rapidement autour de l'aimant que son extrémité L_2 est plus près de la surface de cet aimant, et que, quand c'est au contraire l'aimant qui peut tourner autour de son axe, et qu'une portion du circuit total parcourt l'aimant et une roue de métal XL_2Y qui lui est invariablement liée, depuis le point L_1 jusqu'au point L_2, le mouvement que prend le barreau par l'action du reste L_1ML_2 du circuit, est d'autant plus rapide que le rayon KL_2 de cette roue est plus petit.

Il se présente ici une difficulté qu'il est bon d'éclaircir.

Lorsque le point L_2 se trouve aussi dans le prolongement de l'axe de l'aimant, soit du même côté que le point L_1, comme on le voit (*fig.* 12), soit de l'autre côté, ainsi que dans la figure 13, les deux angles θ_2 et θ'_2, deviennent tous deux égaux à o ou à π, et la différence de leurs cosinus étant nulle, le moment de rotation l'est aussi; aussi observe-t-on alors que, quand les deux extrémités de l'arc L_1ML_2 sont dans l'axe autour duquel il peut tourner librement, il reste immobile, dans le cas où cet axe coïncide avec celui de l'aimant EF; et que si cette coïncidence n'a lieu qu'à peu près, il se meut d'autant plus lentement que les deux axes sont plus près l'un de l'autre, mais seulement pour prendre une position fixe, et non pour tourner d'un mouvement continu autour de l'aimant.

Dans le cas où l'on courbe l'aimant, comme on le voit (*fig.* 14), afin que le milieu de l'axe GH, qui joint ses deux pôles, se trouve en dehors du barreau, et qu'ainsi l'autre extrémité L_2 du fil L_1ML_2 puisse, de même que la première L_1, être placé sur la direction de cet axe, mais entre les deux pôles A et B, il résulte des calculs de M. *Savary*, et des expériences faites, il y a quelques années, par différens physiciens, sur les aimans annulaires, que la courbure de l'aimant ne fait rien à l'action qu'il exerce, et que cette action est toujours la même que celle d'un aimant rectiligne qui aurait ses pôles aux mêmes points A et B, d'où il suit que le moment de rotation

$$-\mu\left(\cos.\ \theta_2 - \cos.\ \theta'_2\right)$$

de L_1ML_2 autour de l'axe GH, devient égal à 2μ, parce qu'on a $\cos.\ \theta_2 = -1$ et $\cos.\ \theta'_2 = 1$; aussi voit-on tourner, dans ce cas, la portion de fil conducteur L_1ML_2 autour de l'axe GH, jusqu'à ce qu'elle vienne s'appuyer contre l'aimant, ce qui arrive nécessairement vers un de ses points K compris entre les pôles A et B, toutes les fois que l'extrémité L_2 est sur l'axe GH entre ces pôles, ainsi qu'on le suppose ici.

Il semble d'abord, que c'est cette circonstance seule qui empêche le fil L_1ML_2 de tourner indéfiniment autour de l'axe GH, car si l'on enlève ce fil des coupes X, Y, qui le mettent en communication avec les deux extrémités de la pile, pour le replacer aussitôt dans ces mêmes coupes, de manière qu'il se trouve de l'autre côté de l'aimant, il tournera dans le même sens autour de GH, jusqu'à ce qu'il vienne de nouveau s'appuyer contre l'aimant au même point K, et en le faisant de nouveau passer de la même manière de l'autre côté de l'aimant, cette sorte de mouvement se continuera indéfiniment.

C'est sur cela qu'est fondée la difficulté qu'il s'agit d'éclaircir, et qui m'a été proposée par M. le professeur *S. Gherardi.*

Elle consiste en ce qu'il semble, pour me servir des expressions qu'il a employées, que ce n'est qu'un obstacle *physique* qui empêche le mouvement de rotation indéfiniment accéléré d'être produit par l'action mutuelle d'un aimant et d'un fil conducteur, dont les deux extrémités sont dans l'axe, et qu'à considérer les choses sous le point de vue purement *mathématique*, où le fil conducteur passerait à travers l'aimant, entre les élémens magnétiques qui agissent sur lui, ce mouvement indéfiniment accéléré aurait lieu, ce qui est en contradiction avec la démonstration purement mathématique de son impossibilité que j'ai donnée ailleurs, en la déduisant de la formule par laquelle j'ai exprimé l'action mutuelle de deux conducteurs voltaïques, et que je donne de nouveau dans ce Mémoire, en partant de la seule loi de l'action qu'un aimant et un fil conducteur exercent l'un sur l'autre.

La réponse à cette difficulté est fondée sur ce que, comme je l'ai remarqué au commencement de ce Mémoire, la valeur de la force résultant de l'action mutuelle d'un aimant et d'une portion infiniment petite de fil conducteur, quelqu'approchée qu'elle soit lorsqu'il s'agit d'un aimant de dimensions finies, ne peut dans ce cas être regardée que comme une approximation, et qu'elle n'est rigoureusement exacte, que pour chacun des élémens magnétiques dont l'aimant est composé.

Or, il est aisé de voir que dans le cas, où l'on supposerait que la portion L_1ML_2 de fil conducteur, venant à rencontrer l'aimant en K, le pénétrerait et passerait entre les élémens magnétiques, l'action de ceux-ci, pour la faire tourner autour de l'axe GH, changerait de signe, et que bien loin qu'on pût regarder alors comme une approximation, le moment calculé relativement aux deux pôles de l'aimant total, ce moment se trouverait de signe contraire à celui qui, ayant réellement lieu, résulte des actions réunies de tous les élemens magnétiques.

C'est ce que je vais expliquer en détail, sur un exemple assez simple, pour que cette explication soit facile à suivre.

Cet exemple consiste à ne considérer, au lieu de l'aimant, qu'une seule série d'élémens magnétiques de même intensité, et dont les axes sont situés dans une ligne quelconque AB (*fig.* 15), sur laquelle ils se trouvent tous à égales distances les uns des autres. Si l'on suppose d'abord que les pôles de ces élémens soient aux points a, b, pour l'un d'eux, a', b', pour le suivant, et ainsi de suite, on pourra sans changer l'action exercée par ces élémens sur un point O, situé à une distance qu'on puisse considérer comme infinie relativement aux intervalles ab, $a'b'$, etc., imaginer que les deux pôles de chaque élément magnétique, s'écartent l'un de l'autre en diminuant d'intensité en raison inverse de leur distance mutuelle, jusqu'à ce que le pôle boréal de l'élément ab, se confonde avec le pôle austral de l'élément $a'b'$, et que la même chose ait lieu pour les pôles de tous les autres élémens. Ceux-ci étant supposés équidistans et de même intensité, les deux pôles d'espèces opposées, appartenant l'un à un élément et l'autre à l'élément précédent ou suivant, qui se trouveront ainsi supperposés, se neutraliseront mutuellement, en sorte qu'il ne restera que l'action des deux pôles extrêmes, c'est-à-dire, du pôle austral α de l'élément A, et du pôle boréal β de l'élément B, précisément comme si, au lieu de tous les élémens magnétiques de la ligne AB, il n'y avait qu'un pôle austral à l'extrémité A de cette ligne, et un pôle boréal à son extrémité B.

Un aimant peut donc être remplacé par une ligne d'une forme quelconque, ainsi occupée par des élémens de même intensité et équidistans, et dont les deux extrémités seraient aux deux pôles de cet aimant.

Concevons donc une pareille série d'élémens magnétiques, et voyons ce qui doit arriver à un élément d'un courant voltaïque M*m*, dirigé comme l'indique la flèche de la figure, et placé à une distance suffisante pour que l'action de AB se réduise, d'après ce que nous venons de dire, à celle des deux pôles extrêmes α et β. La force relative au pôle austral α, tendra à porter l'élément M*m* suivant la perpendiculaire OS au plan αM*m*, du côté de ce plan qui est à gauche d'un observateur qui serait placé dans la parallèle N*n* à M*m*, menée par le point α, et qui, ayant les pieds en N et la tête en *n*, regarderait l'élément M*m*; par la même raison, la force relative au pôle β, tendra à porter l'élément M*m* suivant la perpendiculaire OT au plan βM*m*, à la gauche d'un observateur placé en β de la même manière. La résultante OR de ces deux forces dirigée comme on le voit dans la figure, tendra donc à rapprocher, dans ce cas, l'élément M*m* de la ligne AB qui représente un aimant : il est aisé de voir que, si l'on place l'élément M*m* dans la même direction en M'' m'' de l'autre côté de AB, il tendra à s'en eloigner, d'où il semble résulter qu'en le supposant assujéti à tourner autour d'un axe situé convenablement, il pourrait revenir en Mm pour se rapprocher de nouveau de AB, et tourner ainsi d'un mouvement continuellement accéléré, s'il pouvait traverser cette ligne, en passant, par exemple, entre les deux élémens magnétiques ab, $a'b'$. Cela n'arrive pas dans l'expérience, parce que le fil conducteur s'appuie contre l'aimant, et l'objection consiste à prétendre qu'il y passerait sans l'obstacle *physique* que lui oppose l'aimant; en sorte qu'à considérer les choses *mathématiquement*, on pourrait produire un mouvement indéfiniment accéléré par l'action d'un aimant et d'un circuit fermé, dont l'élément Mm est supposé celui qui, dans ce mouvement, rencontrerait la ligne AB. La réponse est que, même en considérant les choses sous ce point de vue, l'élément Mm ne pourrait jamais passer entre les élémens magnétiques ab, $a'b'$, parce que dès qu'il en serait assez près, comme dans la situation $M'm'$, pour qu'on ne pût plus supposer sans changer l'action, les deux pôles b et a' superposés, il faudrait considérer, au lieu de la série d'élémens magnétiques AB, les deux séries Ab, $a'B$, qui agiraient en vertu des forces relatives aux pôles b et a', en sens contraire des actions relatives aux pôles de nom contraire α et β, qui existaient seules dans le cas précédent; ce qu'on voit dans la figure, par les directions de ces forces $O'S'$, $O'T'$, et de leur résultante $O'R'$. D'ailleurs, à cause de la très-petite distance, ces forces deviendraient comme infinies, par rapport aux forces relatives aux pôles α, β, dès que l'élément M*m* serait sur le point de passer entre les élémens magnétiques *ab*, *a'b'*; il serait donc violemment repoussé en sens contraire du mouvement acquis; et ce mouvement, à considérer les choses même sous le point de vue purement mathématique, serait peu à peu anéanti et remplacé par un mouvement en sens contraire, en sorte qu'on n'aurait que des oscillations autour d'une position fixe, au lieu d'un mouvement indéfiniment accéléré dans le même sens, ce qui est d'ailleurs rigoureusement démontré pour le cas où le fil conducteur, dont M*m* fait partie, forme un circuit fermé, puisque dans ce cas, l'action peut être ramenée à des forces en raison inverse du carré de la distance, qui ne peuvent jamais produire un mouvement indéfiniment accéléré.

Le même changement dans la direction de l'action exercée par la série d'élémens magnétiques AB, qui a lieu à l'égard de l'élément de fil conducteur M*m*, lorsqu'on suppose que cet élément est successivement placé hors de l'aimant, et dans son intérieur entre deux élémens magnétiques, a également lieu à l'égard d'un autre élément magnétique, que l'on supposerait placé successivement dans ces deux situations. Il est évident, en effet, que dans le cas où cet élément magnétique serait placé en M assez loin de la ligne AB, il se dirigerait de manière que son pôle austral fut en bas dans la figure du côté du pôle boréal β, et son pôle boréal en haut, du côté du pôle austral α; tandis que s'il se trouvait entre les deux élémens magnétiques ab, $a'b'$, il se dirigerait au contraire, de manière que son pôle austral fut en haut, le plus près possible du pôle boréal b, et son pôle boréal en bas du côté du pôle austral a'.

Je terminerai ces considérations sur les mouvemens qu'un fil conducteur imprime à un aimant, par le calcul des forces qui produisent le mouvement que prend l'aimant dans l'expérience de M. *OErsted*; et je supposerai, pour fixer les idées, qu'il s'agisse de calculer l'action qu'un conducteur rectiligne indéfini et horizontal NM (*fig* 16), exerce sur un aimant AB, suspendu par un fil de soie ZC au crochet Z, et dont le milieu C est dans le plan vertical EFMN, passant par ce conducteur, l'aimant AB étant aussi horizontal et susceptible de tourner autour de ce point C.

Soit CD la perpendiculaire élevée au point C à ce plan, laquelle se trouve dans le même plan horizontal que l'axe BA de l'aimant; nommons ε l'angle DCA de l'oscillation, angle qu'on suppose très-petit.

Soit la perpendiculaire AH$=a$, la distance AM$=r$, l'angle HAM $=\theta$, d'après la règle énoncée d'abord par M. *Biot*, l'action relative au pôle austral A, exercée par l'aimant sur l'élément Mm du fil conducteur, dont O est le milieu, est dirigée suivant la perpendiculaire OS au plan AMm, et égale à $\mu\,\dfrac{\mathrm{M}m\ sin.\ \mathrm{AMH}}{r^2}$, que j'ai montré pouvoir s'écrire ainsi

$$\mu \frac{2\text{AM}m}{r^3} = \mu \frac{d\theta}{r},$$

parce que $2\text{AM}m = r^2 d\theta$.

Or, dans le triangle rectangle AHM, on a $r = \dfrac{a}{cos.\,\theta}$: ainsi la force suivant OS est

$$\mu \frac{d\theta \, cos.\,\theta}{a},$$

dont l'intégrale, entre les limites θ_1 et θ_2, donne pour la valeur de la résultante de toutes les forces parallèles exercées sur AB,

$$\frac{\mu\,(sin.\,\theta_2 - sin.\,\theta_1)}{a}.$$

Quand on suppose que le fil conducteur BA s'étend à l'infini dans les deux sens, on a $\theta_1 = -\frac{\pi}{2}$, $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$, ainsi, $sin.\,\theta_1 = -1$, $sin.\,\theta_2 = 1$, et la résultante est égale à

$$\frac{2\mu}{a};$$

elle est donc en raison inverse de la distance AH $= a$, du pôle A au fil conducteur.

Cette résultante est comme toutes ses composantes élevée perpendiculairement au plan ANM, par un des points de la droite NM.

Dans le cas du conducteur indéfini dans les deux sens, ce point est en H, c'est-à-dire que c'est le pied de la perpendiculaire abaissée du pôle A sur NM, en sorte que la résultante est dirigée suivant l'horizontale HR, perpendiculaire à NM, parce qu'à égales distances de part et d'autre de ce point H les composantes sont égales, et donnent, par conséquent, deux à deux, des résultantes partielles qui passent par H.

En abaissant du pôle boréal B, la perpendiculaire BL sur NM, on trouvera une autre résultante de toutes ces forces relatives à ce pôle, exercée par l'aimant sur le conducteur NM; dans le cas que nous supposons ici, où le milieu de l'aimant est dans le plan vertical ENMF, cette résultante est égale à la première et a de même pour valeur $\frac{2\mu}{a}$.

Pour avoir l'action qu'exerce réciproquement le fil conducteur NM sur l'aimant AB, il faut, suivant les premiers principes de la statique : 1° concevoir en H un point h sans liaison avec ce fil, mais invariablement lié avec l'aimant, on aura pour première force agissant sur l'aimant, une force égale et opposée à la force $\frac{2\mu}{a}$ appliquée en H et dirigée suivant HR, cette première force appliquée au point h lié à l'aimant, aura la même valeur et sera dirigée suivant hR'.

2° Concevoir en L un point l, qui soit de même sans liaison avec le fil NM, et invariablement lié à l'aimant; à ce point l, on aura une seconde force appliquée en l, égale et opposée à LT qui sera, par conséquent, dirigée suivant lT', et aura pour valeur $\frac{2\mu}{a}$.

Tous les mouvemens que pourra prendre l'aimant, résulteront de ces deux forces, et si l'on nomme φ l'angle AHG, qui est égal à BLK, on pourra décomposer chacune d'elles en deux autres forces, l'une horizontale et l'autre verticale, ce qui en donnera quatre, savoir :

1° hR'' et lT'' égales à $\frac{2\mu \cos. \varphi}{a}$,

2° hR''' et lT''' égales à $\frac{2\mu \sin. \varphi}{a}$,

ces deux dernières agissant dans le même sens, étant parallèles à la verticale CU et situées à égales distances de cette verticale, se composeront en une force unique dirigée suivant CU, et qu'on pourra supposer appliquée au point C : elle sera détruite par le fil CZ, auquel l'aimant est suspendu dans l'expérience actuelle; mais s'il ne l'était pas, elle le porterait vers le conducteur NM. C'est précisément cette force, que j'ai désignée sous le nom d'action attractive ou répulsive [1], dans le premier Mémoire sur ce genre de phénomène, où j'ai analisé les mouvemens produits dans l'expérience de M. *OErsted*.

Quant aux deux forces horizontales, dirigées suivant les droites $h\mathrm{R}''$, $l\mathrm{T}''$, et égales à $\frac{2\mu \cos. \varphi}{a}$, elles formeront évidemment un couple dont on trouvera la valeur en multipliant cette expression par la distance lh des deux forces, distance qui est égale à $2b \cos. \varepsilon$, en nommant b la demi-longueur CA ou CB de l'aimant, prise d'un de ses pôles à l'autre.

Le moment cherché, sera donc égal à $\frac{4\mu b \sin. \varepsilon \cos. \varphi}{a}$, et l'équation du mouvement sera

$$\frac{d\omega}{dt}\int r^2 dm = \frac{4\mu b \sin. \varepsilon \cos. \varphi}{a},$$

ω étant la vitesse autour de CU à la distance 1. Plus l'aimant est court et plus l'angle φ est petit, on a donc sensiblement $\varphi = 0$, et

$$\frac{d\omega}{dt}\int r^2 dm = \frac{4\mu b \sin. \varepsilon}{a}.$$

---

(1) Cette action est ici attractive, parce que l'aimant est situé de manière que son pôle austral A est à gauche du courant NM.

$\int r^2 dm$, dans cette équation, est le moment d'inertie de l'aimant autour de l'axe CU, qui passe par son centre d'inertie C.

On voit, à la seule inspection de la figure, que les forces dirigées suivant hR'', lT'', se réunissent pour amener l'aimant dans la direction CD perpendiculaire au plan ENMF, en le faisant tourner autour de CU; mais s'il était d'abord dans cette direction, il y resterait en équilibre, parce qu'alors ces deux forces se trouvent opposées dans la même direction, ce qu'on voit, parce que l'angle ε étant alors nul, on a $sin. \varepsilon = 0$, ce qui réduit à o la valeur que nous venons de trouver pour le couple. La force qui, en agissant à la distance b de l'axe CU sous l'angle ε, produirait le même effet que ce couple, pour faire tourner l'aimant autour de CU, est évidemment égale à $\frac{4\mu}{a}$, en faisant toujours $cos. \varphi$ sensiblement égale à l'unité. Cette force est, comme l'a trouvée M. *Biot*, en raison inverse de a.

C'est à cause que nous avons supposé l'aimant horizontal et son milieu C dans le plan vertical ENMF, que les distances des deux pôles au conducteur NM, et par conséquent, les forces relatives à ces pôles, se sont trouvées égales, d'où il est résulté que leurs composantes horizontales, dirigées suivant hR'' et lT'' ont formé un couple; dans ce cas, il est évident que le résultat est identiquement le même que dans l'hypothèse du couple primitif, parce qu'un couple peut être transporté, sans que les effets produits éprouvent aucun changement, dans tout plan parallèle au sien, pourvu qu'il conserve la même valeur et que les nouveaux points d'application des forces soient invariablement liés aux anciens.

Cette identité des résultats produits par les forces appliquées comme elles le sont réellement aux points *h* et *l*, et par des forces égales aux premières, qu'on supposerait appliquées aux pôles A et B, se voit immédiatement dans le cas que nous avons considéré ici, parce que les composantes horizontales de ces forces forment un couple qui peut être transporté où l'on veut. Cette sorte de démonstration n'a plus lieu quand les pôles A et B ne sont pas à la même distance du fil conducteur, parce qu'alors les forces qui leur sont relatives, n'étant plus égales entre elles, il n'y a plus de couple. Dans ce cas, la même identité dépend d'une autre condition, savoir, que le conducteur qui agit sur l'aimant, forme un circuit fermé ou un système de circuit fermé, alors l'identité a toujours lieu comme je l'ai démontré dans la *Théorie des phénomènes électro-dynamiques*, que j'ai publiée en 1826, page 102. On sent bien au reste, qu'à moins qu'une portion du courant électrique ne passe par l'aimant ou par un conducteur lié à l'aimant, cette condition est toujours remplie, ainsi que je l'ai dit dans le même ouvrage, parce que la pile, les rhéophores et toutes les portions de conducteurs qui mettent ceux-ci en communication, forment réellement un circuit toujours fermé.

Quand M. *Biot* a fait ses expériences, c'était réellement un circuit fermé qui agissait sur l'aimant, et cela seul suffisait pour démontrer que les résultats devaient être identiques dans ma manière de considérer l'action d'un fil conducteur et d'un aimant, et dans l'hypothèse du couple primitif. Voyez à ce sujet l'ouvrage que je viens de citer, note V, page 216 et suivantes.

SUPPLÉMENT.

LETTRE A M. LE DOCTEUR GHERARDI.

Je vous remercie beaucoup de la lettre que vous m'avez fait l'honneur de m'écrire il y a quelque temps, et où vous me faites de nouvelles objections sur ce que j'ai dit que l'action mutuelle de deux circuits électriques *solides et fermés*, ou de deux assemblages de circuits de cette sorte, ne peut jamais produire un mouvement continu où la vitesse aille toujours en croissant jusqu'à ce que les frottemens et les résistances des milieux où s'opèrent le mouvement rendent cette vitesse constante.

Il m'a semblé que ces objections sont fondées en partie sur ce que vous n'avez peut-être pas donné le même sens que moi à ce que je disais au sujet de la restriction que j'avais mise à cette proposition, en n'y parlant que de l'action mutuelle de deux circuits solides fermés, ou de deux assemblages des mêmes circuits; et sur ce que vous n'avez pas fait attention à la distinction que l'acception dans laquelle on prend généralement les mots *rotation* et *révolution*, m'avait autorisé à faire entre le mouvement de *révolution* d'un aimant flottant dans le mercure autour d'un fil conducteur, découvert par M. *Faraday*, et le mouvement de *rotation* du même aimant autour de son axe, que j'ai obtenu le premier à une époque où l'on croyait ce dernier impossible, comme vous pouvez le voir dans le Mémoire de M. *Faraday*, en date du 11 septembre 1821. Dès lors, vous avez dû naturellement penser que j'avais dit du premier ce que je n'avais réellement énoncé qu'à l'égard du second, savoir qu'il ne pouvait avoir lieu que quand le courant passait par l'aimant, ou par une portion de conducteur liée invariablement à cet aimant.

Je vous prie de relire ma lettre à M. *Faraday*, qui est dans mon recueil, pour vous assurer que je n'y parle que du mouvement de *rotation*. Vous y verrez aussi que la raison pour laquelle le mouvement de *rotation* est impossible quand le courant ne passe ni par l'aimant ni par un conducteur lié à l'aimant, c'est que cet aimant est alors soumis à l'action d'un circuit total qui est fermé en y comprenant la pile, et que les actions réunies de toutes les parties d'un tel circuit se réduisent à deux forces, qui passent, l'une par un des pôles de l'aimant et l'autre par l'autre, et qui ne peuvent par conséquent le faire tourner autour de l'axe mené par ces deux pôles. Cette raison n'a lieu que dans le cas de la *rotation* d'un aimant autour de son axe; elle rend cette *rotation* également impossible, soit que le circuit total fermé par la pile, et dont l'aimant ni une portion de conducteur lié à l'aimant ne fait alors partie, soit entièrement solide ou en partie solide et en partie liquide.

Pour vous en assurer vous pouvez faire l'expérience suivante.

Dans un vase KLMN (*fig.* 3), dont le fond est fermé par un bouchon MN, traversé par le tube de verre EF, où est mastiqué un des rhéophores, le rhéophore positif GDO, par exemple, on met du mercure qui, s'élevant au-dessus de l'extrémité supérieure E du tube de verre, communique avec la portion EO de ce rhéophore qui s'y trouve plongée; on suspend ensuite à un point fixe A, situé dans la verticale qui passe par le point O, l'aimant BC, dont l'axe est dans cette verticale, à l'aide d'un fil de soie non tordu qui n'ait que la grosseur nécessaire pour supporter le poids de l'aimant, en lui laissant la plus grande facilité possible de tourner autour de la même verticale; le bord du vase est recouvert intérieurement d'une lame circulaire de cuivre RS, qui communique avec l'autre rhéophore STH.

Les choses étant ainsi disposées, on met la pile en action et l'on voit tourner le mercure dans le vase KLMN, mais l'aimant reste immobile.

Cet effet paraît surprenant au premier moment, car toute action étant réciproque entre les deux corps entre lesquels elle agit, il semble d'abord que l'aimant BC ne doit pas pouvoir faire tourner le mercure du vase KLMN, dans un sens, sans éprouver une réaction qui tende à le faire tourner en sens contraire; il est bien certain qu'il éprouve cette réaction, et qu'elle tend à le faire tourner dans ce sens opposé à celui du mouvement du mercure. Mais le reste du circuit STHGDO, agit aussi sur l'aimant BC, et comme l'action du circuit total composé de cette portion STHGDO et des courans du mercure se réduit à deux forces, passant par les pôles de l'aimant BC, et donne, par conséquent, zéro pour la somme des momens autour de l'axe de cet aimant, il s'en suit que l'action exercée par la portion STHGDO est exprimée par un moment de rotation égal et opposé à celui qui représente l'action des courans du mercure. Telle est la cause de l'immobilité que présente l'aimant dans cette circonstance, immobilité que vous pouvez observer toutes les fois que vous le voudrez, et qui me paraît résoudre une de vos objections fondée sur ce qu'en vertu du principe de l'égalité entre l'action et la réaction, un système mobile ne peut tourner en vertu d'un système fixe, qu'autant qu'il ferait tourner avec le même moment de rotation, ce dernier, si le premier devenait fixe et le dernier mobile: ce principe n'est vrai que quand chacun des deux systèmes n'éprouve d'action que de la part de l'autre; il cesse de l'être, quand l'un des deux éprouve de la part d'un troisième système, toujours fixe, une action capable de faire équilibre à celle que l'autre exerce sur lui. Ainsi, le mercure mobile, dans l'expérience précédente, tourne par l'action de l'aimant fixe BC; rendez l'aimant mobile en le suspendant au fil AB, il ne tournera pas, parce qu'un troisième système, fixe dans les deux cas, savoir, le reste STHGDO du circuit total, exerce sur l'aimant une action qui fait équilibre à la réaction des courans du mercure, qui continue à tourner de la même manière, soit que l'aimant soit fixe ou suspendu au fil de soie AB.

Au reste, quand j'ai dit que l'action d'un circuit solide et fermé, sur un aimant, pour le faire tourner autour de son axe, était nulle, il est évident que je n'ai parlé que du moment de rotation autour de cet axe, moment qui est nul, non parce que les forces exercées par le circuit solide fermé sur l'aimant, se réduiraient à zéro, ce qui certes n'est pas, mais parce que les deux résultantes de ces forces passent par les pôles; ce qui en rend les momens de rotation nuls, quelles que soient les valeurs de ces forces. Mais ces momens cessent de l'être, et les résultantes ne passent plus par les pôles de l'aimant, quand une partie du courant total passe par l'aimant ou par un conducteur lié invariablement à cet aimant, parce que cette partie du courant total n'agissant plus sur lui, ne fait plus équilibre au moment de rotation produit par l'action que le reste du circuit exerce sur l'aimant, action qui le fait tourner comme je l'ai observé le premier et expliqué ainsi. Cette explication ne me paraît rien laisser à désirer, et il me semble que vous l'adoptez comme moi; c'est pourquoi je n'insisterai pas davantage sur ce point.

Tout ce que j'ai dit dans ma lettre à M. *Faraday*, étant fondé sur ce que ce moment total autour de l'axe de l'aimant est nul, ne peut s'appliquer évidemment qu'au mouvement de rotation autour de cet axe, et non au mouvement de *révolution* d'un aimant ou d'un assemblage d'aimans autour d'un fil conducteur; c'est à ce mouvement de *révolution* qu'est relative l'expérience de M. *De Nobili.* Vous pensez, Monsieur, que l'on pourrait l'obtenir par l'action d'un conducteur dont toutes les parties seraient invariablement liées entre elles et avec la pile; je persiste à croire cela impossible, mais c'est pour des raisons toutes différentes de celles qui se rapportent au mouvement de *rotation* d'un aimant autour de son axe. La somme des actions qu'exerce sur un aimant un conducteur de ce genre, passe bien toujours par les pôles de cet aimant, comme je l'ai démontré dans mon *Précis de la Théorie des Phénomènes électro-dynamiques* (1), lorsqu'on part de ma théorie, et comme le supposent également les physiciens qui ne l'adoptent pas; mais ces forces, passant par les pôles de l'aimant, pourront avoir un moment de rotation autour du fil conducteur qui ne passe pas par ces pôles. L'aimant, en effet, commence à tourner, dans beaucoup de cas, autour de la partie voisine d'un fil conducteur qui est solide d'une extrémité de la pile à l'autre; mais de quelque manière que j'aie varié l'expérience, tant que toutes les parties du conducteur sont restées immobiles, l'aimant ne s'est mis en mouvement que

(1) Publié en 1824, chez Crochard, libraire, cloître St-Benoit, n° 16, et Bachelier, libraire, Quai des Augustins, n° 55.

pour s'arrêter, dans un cas, en s'appuyant contre le fil, dans l'autre, en prenant une position où il restait en équilibre après avoir oscillé autour d'elle. Le premier cas a lieu lorsque l'aimant est disposé de manière que, dans son mouvement, il est rencontré entre ses deux pôles par une portion du fil conducteur; le second, quand dans le même mouvement, les deux pôles passent tous deux en dedans ou tous deux en dehors du circuit solide qui est fermé par la pile et qui agit tout entier sur l'aimant.

Cela n'a lieu que quand toutes les parties de ce circuit sont absolument immobiles; il suffit de changer alternativement avec la main la situation de certaines parties du conducteur, pour produire le mouvement continu; mais alors le circuit n'est plus ce que j'appelle *solide*, et ce cas ne diffère de celui où l'aimant flottant dans le mercure tourne continuement, que parce que l'on change la forme du conducteur avec la main, tandis que les courans du mercure changent de place à mesure que l'aimant avance, en passant d'un côté à l'autre de cet aimant, par suite de son mouvement même.

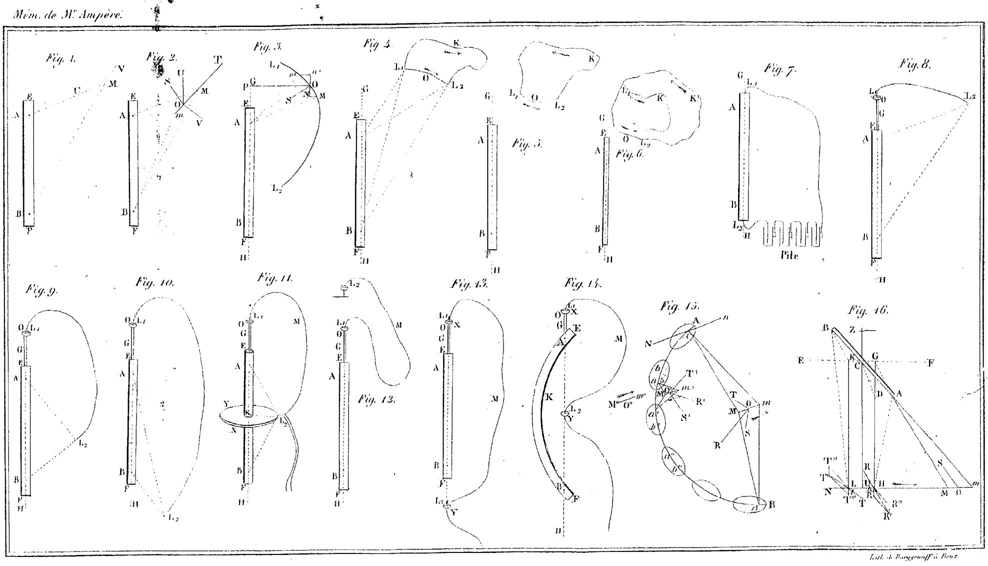
Ce changement de place des courans dans le mercure, par suite du mouvement de l'aimant, est ce qui établit une différence complète entre ce cas et celui d'un circuit dont toutes les parties sont immobiles; c'est, suivant moi, ce qui rend possible le mouvement de *révolution* continue de l'aimant autour du fil. Avant de rejeter mon opinion à cet égard, je vous prie, Monsieur, de suspendre votre jugement jusqu'à ce que je vous aie fait connaître les deux sortes de preuves sur lesquelles je l'appuie.

Ces preuves consistent : 1° dans les expériences mêmes dont je viens de parler ; je les ai variées de toutes les manières possibles, et jamais l'aimant n'a pris un mouvement qui se soit continué indéfiniment, tant que toutes les parties du circuit voltaïque sont restées immobiles. Lorsqu'on fait passer le fil conducteur dans un aimant cylindrique creux, dont l'axe est vertical, et qui est suspendu de manière à pouvoir tourner librement sur lui-même, l'expérience montre qu'il resterait complétement immobile, s'il était aimanté d'une manière égale, tout autour de son axe ; ce à quoi on ne peut parvenir dans la pratique. Les inégalités de son magnétisme sont cause, conformément à la théorie, qu'il tourne en se portant vers une position déterminée d'équilibre stable, à laquelle il s'arrête après avoir oscillé autour d'elle, parce qu'il faut nécessairement, dans ce cas, que les pôles de chaque aimant partiel, dont on doit regarder l'aimant creux comme composé, passent tous deux au dedans du circuit formé par le fil conducteur et la pile. L'expérience qui constate ce fait est bien aisée à répéter, en suspendant l'aimant cylindrique creux à un fil de soie non tordu qui, n'ayant que la force nécessaire pour en porter le poids, ne présente qu'une très-petite force de torsion, et en disposant le fil conducteur comme on le voit dans la *fig.* 2. Je désire beaucoup, Monsieur, que vous fassiez vous-même cette expérience, celles que vous me proposez et toutes celles dont je parle dans cette lettre; vous vous assurerez ainsi vous-même, par l'expérience, de la vérité de tous les résultats que j'y expose.

2° Dans la démonstration complète et rigoureuse, contenue dans le Mémoire que je vous envoie avec cette lettre, de l'impossibilité de produire un mouvement avec accélération continue de vitesse, jusqu'à ce qu'il devienne uniforme à cause des résistances et des frottemens, en faisant agir un circuit solide et fermé sur un aimant.

Ce n'est pas sur mes formules que j'établis cette démonstration; je l'appuie uniquement sur la loi que M. *Biot* a d'abord énoncée, quoiqu'elle ne s'accordât pas avec les expériences qu'il avait faites alors, mais dont il a, depuis, par de nouvelles expériences, constaté l'exactitude de manière à ne rien laisser à désirer à cet égard. Vous savez, Monsieur, que cette loi est une conséquence de ma formule, quand on conçoit les aimans comme des assemblages de courans électriques, formant autour de leurs particules des solénoïdes d'un très-petit diamètre dont les extrémités agissent, d'après les calculs fondés sur cette formule et dus à M. *Savary*, précisément comme les molécules magnétiques que supposent, pour expliquer les phénomènes, ceux qui n'admettent pas ma théorie. Quoique je sois plus que jamais convaincu que cette supposition est dénuée de fondement, et que les phénomènes qu'offrent les aimans sont produits par les courans électriques de leurs particules, j'emploierai la dénomination de molécules magnétiques, pour désigner les points où, dans une manière de concevoir les choses, il y aurait effectivement des molécules de fluide austral et de fluide boréal, et où se trouvent, dans l'autre, les extrémités de petits solénoïdes formés par les courans des aimans; je ne ferai aucune autre supposition que d'admettre, avec les physiciens qui combattent ma théorie, que ces points agissent sur chaque élément d'un fil conducteur, comme tout le monde convient que les pôles d'un aimant agissent en effet sur les élémens de ce fil; et, en ne partant ainsi que des faits, et des lois déduites des faits que reconnaissent ceux dont les opinions sont les plus opposées aux miennes, je ne vois pas ce qu'ils pourraient encore opposer à une démonstration purement mathématique et appuyée uniquement sur leurs propres principes.

Vous avez très-bien montré, Monsieur, que l'expérience de M. *De Nobili*, bien loin d'être contraire à ma *Théorie électro-dynamique*, telle qu'elle est exprimée par la formule qui représente l'action mutuelle des deux élémens de conducteurs voltaïques, en est au contraire une suite nécessaire; mais vous persistez à penser qu'elle est contraire au principe que j'ai énoncé sur l'impossibilité du mouvement continu, malgré les frottemens et les résistances : ce principe serait alors en opposition avec ma théorie, et je serais le premier à le rejeter; mais ce n'est que quand on lui donne l'extension dans laquelle vous l'avez pris. Il est parfaitement d'accord quand, on le restreint au cas de deux circuits ou assemblages de circuits solides et fermés tous les deux, puisque dans l'expérience de M. *De Nobili*, une



Lith. de Bonygraaff à Brest.

partie du circuit, celle qui se compose des courans du mercure, n'est pas solide, et change de place en passant d'un côté de l'aimant à l'autre, à mesure que cet aimant se meut.

Avec cette restriction, le principe est vrai, puisqu'il est une conséquence mathématique et rigoureuse de la loi énoncée d'abord par M. *Biot*, si complétement vérifiée depuis et adoptée par tous les physiciens.

Il est évident d'ailleurs que l'explication du mouvement *de révolution* de l'aimant, flottant sur le mercure, autour d'une portion de fil conducteur située hors de cet aimant, telle que je l'ai donnée dans mon *Recueil*, et qu'elle est répétée dans le *Manuel d'électricité dynamique* de M. *De Monferrand*, pag. 147—149, ne dépend en aucune manière de ce que le courant électrique passe ou non par l'aimant.

J'ai eu soin en effet, dans cette explication, de montrer que toutes les portions de courans qui sont en dehors de l'aimant dans le mercure où il flotte, tendent à le faire tourner autour du point P (*fig.* 10.) *Manuel d'électricité dynamique*, pl. IV, *fig.* 58), soit que le courant y aille en s'approchant de l'aimant, comme dans les portions P*n*, P*n'*, ou en s'en éloignant, comme dans les portions *m*M, *m'*M', soit qu'il passe à côté, comme dans les portions P*e*, P*e'*.

S'il était possible qu'il y eût dans l'intérieur de l'aimant des portions de courant suivant les lignes *nm*, *n'm'*, qui ne fissent pas corps avec lui, et pussent ainsi tendre à lui imprimer un mouvement en sens contraire de celui qu'il prend par l'action du reste du circuit, l'aimant s'arrêterait dans une position déterminée, après avoir oscillé autour d'elle. Car dans cette figure, où le cercle *ntmm't'n'* représente un des courans de l'aimant, ces portions repousseraient l'arc *ntm* et attireraient *m't'n'*, deux actions qui tendent à porter l'aimant dans le sens VA, tandis que celles qu'exercent tous les courans qui sont extérieurs à cet aimant, tendent à le porter au contraire dans le sens AV; mais cette supposition ne peut être réalisée, puisque, lorsque l'aimant est recouvert d'une substance isolante, comme dans l'expérience de M. *De Nobili*, il n'y a point de courant dans l'intérieur de l'aimant, et que, lorsqu'il y en a, parce que l'électricité traverse le barreau, leur action est détruite par la réaction égale exercée sur eux par les courans de l'aimant. D'après cette considération, il y a nécessairement identité entre les effets produits dans les deux cas; le barreau tourne également autour du fil conducteur, et l'expérience de M. *De Nobili* comme celle de M. *Faraday*, bien loin d'être opposée à ce que j'ai dit dans mon *Recueil*, est une conséquence nécessaire de l'explication que j'y ai donnée de cette dernière expérience dans le passage que je viens de citer.

Quand je lus l'expérience de M. *De Nobili*, je ne compris point comment il y voyait une objection contre ce que j'avais dit; c'est par la lettre que vous m'avez fait l'honneur de m'écrire, que j'ai vu que cela venait d'une part, de ce que l'on avait étendu au mouvement de *révolution* de l'aimant autour du fil conducteur, ce que j'avais dit relativement à la nullité du moment des forces qui agissent sur l'aimant du mouvement de *rotation*, seulement d'un barreau aimanté autour de son axe, et d'autre part, de ce qu'on n'avait pas fait attention aux passages de mon *Recueil*, dans lesquels j'avais mis pour condition à l'impossibilité d'un mouvement qui se continuât indéfiniment malgré les résistances, la solidité des deux circuits fermés, agissant l'un sur l'autre. Passages que j'ai cités dans ma dernière lettre imprimée dans les *Annales de chimie et de physique*, tome XXIX, pag. 375 et 376.

Mais, dira-t-on, si l'on a un fil conducteur disposé comme on le voit en PABCDEN (*fig.* 2), et qui porte en C une pointe CO, sur laquelle tourne une tige horizontale KG, comme l'aiguille d'une boussole sur son pivot, et que cette tige, maintenue dans une situation horizontale par le contrepoids L, porte à son extrémité G l'aimant GH, celui-ci tournera autour du point O, et viendra s'appuyer contre le fil CD du côté où son pôle austral se trouve à gauche du courant qui parcourt ce fil; si alors on le passe de l'autre côté, il tournera dans le même sens, s'éloignera de ce fil, et, après avoir fait un tour, reviendra s'appuyer contre le même point de CD; ne semble-t-il pas qu'on pourrait en conclure que, si ce mouvement ne peut pas se continuer indéfiniment, cela ne tient pas à la nature de la force électro-dynamique, mais à la rencontre, en quelque sorte fortuite, de l'aimant et du fil CD? Rien ne serait plus erroné qu'une pareille conclusion; car s'il était possible que l'aimant se laissât pénétrer par ce fil, sans pour cela contracter d'adhérence avec lui, dès qu'il y aurait une partie du fil dans l'intérieur du barreau, elle agirait en sens contraire et arrêterait l'aimant; ou du moins, si on lui avait imprimé une vitesse suffisante pour le faire passer outre, elle diminuerait la force vive due à cette vitesse, autant que celle-ci aurait augmenté par l'action du conducteur ABCD, pendant le tour qu'aurait fait l'aimant depuis l'instant où il avait quitté l'autre côté de CD, jusqu'à celui où il est venu de nouveau rencontrer CD.

C'est là une conséquence du théorème dont je donne la démonstration dans le Mémoire joint à cette lettre; mais il est aisé de s'en assurer en substituant à l'aimant GH un courant circulaire, qu'on obtient en pliant un conducteur mobile MNODO, comme on le voit (*fig.* 5); ce fil porte à une de ses extrémités une pointe M, qui plonge dans le mercure de la coupe F; cette coupe communique avec l'extrémité C de la branche BC du conducteur PABCTVDA, interrompu entre les points C et T, afin que le courant passe dans le conducteur mobile.

Lorsqu'on infléchit légèrement l'ensemble des deux fils MO, RS, de manière que la portion circulaire OQR vienne rencontrer OVD, cette portion imitera exactement le petit aimant GH (*fig.* 4); elle sera attirée par le conducteur fixe VD, jusqu'à ce qu'elle s'arrête en s'appuyant contre lui; et lorsqu'on la fera passer de l'autre côté, comme elle est dans la figure, elle s'en éloignera constamment et après un tour entier, viendra de nouveau s'appuyer comme la première fois contre VD. Ne semblerait-il pas que ce n'est que parce

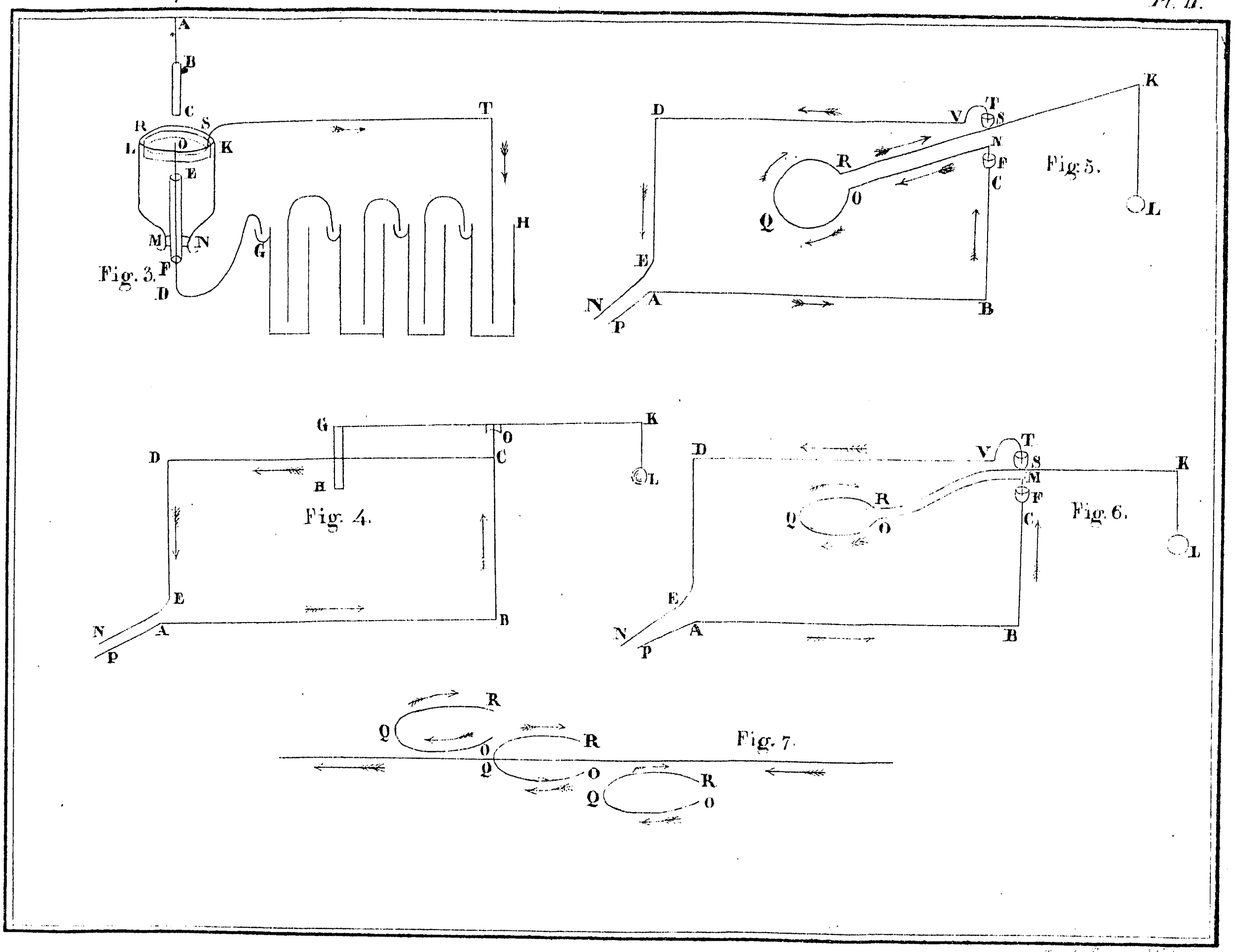


Fig. 3.
A
B
C
R
S
L
O
K
E
T
H
M
N
F
G
D
Fig. 5.
D
V
T
S
K
N
R
F
C
Q
O
L
E
N
A
P
B
Fig. 4.
G
K
O
D
C
H
L
E
N
A
P
B
Fig. 6.
D
V
T
S
K
M
R
F
Q
O
C
L
E
N
A
P
B
Fig. 7.
R
Q
R
O
Q
O
R
Q
O

qu'elle rencontre VD, que son mouvement de révolution autour de la verticale BCT est arrêté? Il n'en est pourtant rien; et lorsqu'en diminuant la petite courbure donnée aux fils MO, RS, on fait en sorte que ce mouvement puisse avoir lieu, parce que la portion circulaire OQR ne rencontre plus VD, mais passe un peu au-dessus, on la voit s'arrêter en équilibre dans la position représentée (*fig.* 6); si l'on veut alors la faire mouvoir dans le sens où elle tourne autour de BCT, quand elle est soit en avant soit en arrière de VD, on éprouve une forte résistance, et on la voit rétrograder vers cette position d'équilibre, parce que les forces exercées sur les deux côtés opposés de OQR, se réunissent pour cette rétrogradation, tandis qu'il n'y avait que leur différence qui agissait lorsque le cercle QOR, situé en avant ou en arrière de VD, tendait à se mouvoir dans l'autre sens.

L'aimant GH (*fig.* 2) s'arrête de même, dès qu'il est disposé de manière à pouvoir passer au-dessus du conducteur fixe CD, en le rasant par son extrémité inférieure H, sans le toucher.

Après avoir éclairci le principe démontré dans le Mémoire cité tout à l'heure, et qui établit l'impossibilité de produire dans un aimant un mouvement qui se continue indéfiniment, malgré les résistances par l'action d'un fil conducteur formant un circuit fermé et solide, il faut répondre à une objection qui se présente naturellement. Si, dans ce cas, l'aimant se meut en vertu de l'action que le premier exerce sur lui; mais seulement jusqu'à une position déterminée, autour de laquelle il tendra à osciller jusqu'à ce qu'il s'y arrête à cause des frottemens ou des résistances de milieu qui tendent à détruire son mouvement, pourquoi la même chose n'aurait-elle pas lieu quand, sans rien changer à la manière dont l'aimant mobile est disposé, on remplace le fil conducteur par un assemblage de deux portions formant exactement le même circuit, mais qui ne sont plus invariablement liées entr'elles, et dont l'une est fixe et l'autre mobile? Cette circonstance paraît en effet ne rien changer à l'action mutuelle de l'aimant et des deux portions du circuit; mais il n'en est ainsi que quand l'aimant est placé hors de ce circuit, et qu'il peut se rendre à la position d'équilibre sans faire changer de place à la portion mobile; aussi voit-on alors, mais seulement alors, l'aimant tendre à s'arrêter en équilibre dans une position déterminée, après avoir oscillé autour d'elle, quoiqu'on rende mobile une portion du courant électrique en la faisant passer dans du mercure, précisément comme si cette portion était fixe: il en est dans ce cas comme dans celui dont je vous parlais tout à l'heure, où un aimant est suspendu par un fil très-fin au-dessus du mercure, qu'il fait tourner en restant lui-même immobile.

Lors même que le mercure tourne, le courant qui y passe n'est pas déplacé, parce qu'il s'établit toujours aux mêmes points, dans de nouveau mercure qui vient remplacer celui où il passait d'abord; mais dès que l'aimant plonge dans le mercure, à mesure qu'il se porte vers la situation où il resterait en équilibre si le courant électrique ne changeait pas de lieu, il déplace ce courant en l'interceptant là où il passait auparavant, pour le laisser passer dans un nouveau lieu que l'aimant abandonne et que vient occuper le mercure. Alors le déplacement change la position d'équilibre, et cette position peut alors fuir toujours devant l'aimant qui ne l'atteint jamais, et qui tend de cette manière à se mouvoir toujours dans le même sens avec une vitesse accélérée : c'est le mouvement de *révolution* continue. La même chose arrive, quand l'aimant est invariablement lié à une partie mobile du circuit qu'il entraîne avec lui ; c'est alors le mouvement de *rotation* de l'aimant autour de son axe : l'un et l'autre ont lieu parce qu'une portion du circuit changeant de place, ce qui a été démontré d'un circuit solide fermé, ne peut plus s'appliquer à ce qui arrive dans ces différens cas.

Je vous prie, Monsieur, d'excuser la longueur de cette lettre, et les répétitions dans lesquelles j'ai dû nécessairement tomber, parce que l'ayant commencée vers l'époque où je reçus la vôtre, je n'en ai écrit les différentes parties qu'à de longs intervalles, pendant lesquels j'étais obligé de m'occuper d'idées toutes différentes, et que, toujours pressé par le temps, j'en reprenais chaque fois la rédaction sans pouvoir relire ce que j'avais déjà écrit. Si vous avez le temps d'en examiner les raisonnemens, et de refaire les calculs contenus dans le Mémoire que j'y joins, je crois que nous serons du même avis, et que vous admettrez mon principe, restreint comme je le fais ici, et ne se trouvant plus par cette restriction même en contradiction ni avec ma propre théorie, ni avec l'expérience de M. *De Nobili*; mais étant une simple conséquence mathématique de la loi généralement admise de l'action mutuelle d'un aimant et d'un élément de fil conducteur, et d'après laquelle cette action se compose des deux forces correspondantes aux deux pôles de l'aimant, déterminées par la formule donnée au commencement du Mémoire joint à cette lettre.

A l'égard de l'impossibilité de produire un mouvement avec accélération continue, sauf le frottement, lorsqu'on fait agir l'une sur l'autre deux portions de conducteur, formant des circuits solides et fermés, elle se démontre d'une manière analogue, en partant de ma formule au lieu de partir seulement de la loi dont je viens de parler, et qui ne s'applique qu'au cas où l'on emploie un aimant; cette démonstration est trop longue pour trouver place ici, mais vous pourrez la voir dans un Mémoire dont je corrige actuellement les épreuves, et où elle serait déjà publiée, si des circonstances particulières n'avaient pas retardé l'impression de ce Mémoire.

FIN.

BRUXELLES, M. HAYEZ, IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE.